Paréntesis: El **método probabilista** es un método no constructivo para demostrar existencia, usado principalmente en combinatoria. Se demuestra la existencia de un objeto la siguiente forma: Si A es un evento, entonces

$$\mathbb{P}(A) > 0 \implies A \neq \emptyset$$

A pesar de usar probabilidades, la conclusión final de existencia es *determinista*. Los siguientes dos ejercicios son ejemplos de este método:

P5 Auxiliar 4

Sean $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos de tamaño k de un conjunto A y suponga que $n < 2^{k-1}$. Muestre, usando el método probabilista, que existe una partición $A = R \cup B$ tal que para $i = 1, \dots, n$

$$A_i \cap R \neq \emptyset \text{ y } A_i \cap B \neq \emptyset$$

En otras palabras, muestre que se puede colorear cada elemento de color rojo o blanco de tal forma que A_i tenga al menos un elemento rojo y uno blanco.

Solución:
Tomemos un coloreo al azar, coloreando cada elemento independientemente de color rojo con probabilidad $\frac{1}{2}$ o blanco de color $\frac{1}{2}$.
Para $i = 1, \dots, n$ sea R_i el evento "existe un elemento de color rojo en A_i" y B_i el evento "existe un elemento de color blanco en A_i". Así el evento $\bigcap_{i=1}^{k}(R_i \cap B_i)$ es equivalente a "cada A_i tiene al menos un elemento de color rojo y uno de color blanco", que es justo el evento que nos interesa. Para concluir usando el método probabilista, tenemos que demostrar que

$$\mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{n}(R_i \cap B_i)] > 0$$

Que es equivalente a que el complemento tenga probabilidad menor que 1:

$$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n}(R_i^c \cup B_i^c)] < 1$$

La gracia de escribirlo así es que podemos usar la desigualdad de Boole (y es lo que se hace casi siempre cuando se quiere demostrar algo con el método probabilista):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n}(R_i^c \cup B_i^c)] &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[R_i^c \cup B_i^c] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{P}[R_i^c] + [B_i^c]])
\end{aligned}$$

R_i^c es el evento "todos los elementos de A_i tienen color rojo". Como cada elemento es coloreado independientemente, $\mathbb{P}(R_i^c) = (\frac{1}{2})^k$. Análogamente, $\mathbb{P}(B_i^c) = (\frac{1}{2})^k$. Enchufando eso,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n}(R_i^c \cup B_i^c)] &\leq \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}) \\
&\leq n \frac{1}{2^{k-1}} \\
&< 1
\end{aligned}$$

ya que por hipótesis $n < 2^{k-1}$. ■

P6 Auxiliar 4

En un torneo, n jugadores juegan todos contra todos, o sea hay en total $\binom{n}{2}$ partidos en los que siempre hay un ganador y un perdedor. Un torneo se dirá k-interesante si para cada subconjunto de jugadores S de tamaño k existe un jugador del torneo que venció a todos los jugadores de S. Muestre que, para k fijo y n suficientemente grande, existe un torneo k-interesante.

Solución:
El método es muy parecido al problema anterior. Tomemos un torneo al azar, en el que el resultado de cada partido se decide tirando una moneda.
Para $S \subset \{1, \ldots, n\}$ sea E_S el evento "existe un jugador fuera de S que le ganó a todo jugador en S ". Entonces, nos basta demostrar que para n suficientemente grande,

$$\mathbb{P}[\bigcap_{|S|=k} E_S] > 0$$

Acotemos entonces la probabilidad del complemento:

$$\mathbb{P}[\bigcup_{|S|=k} E_S^c] \leq \sum_{|S|=k} \mathbb{P}[E_S^c]$$

El evento E_S^c corresponde a "cualquier jugador fuera de S pierde contra algún jugador en S". Sea x un jugador que no está en S. Por independencia, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[E_S^c] &= \mathbb{P}[x \text{ pierde contra algún jugador en } S]^{n-k} \\
&= (1 - \mathbb{P}[x \text{ gana contra todo jugador de } S])^{n-k} \\
&= (1 - \frac{1}{2^k})^{n-k}
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\bigcup_{|S|=k} E_S^c] &\leq \sum_{|S|=k} (1 - \frac{1}{2^k})^{n-k} \\
&\leq \binom{n}{k} (1 - \frac{1}{2^k})^{n-k} \\
&\leq \frac{n^k}{k!} (1 - \frac{1}{2^k})^{n-k}
\end{aligned}$$

Queremos ver que lo anterior es menor que 1 para n suficientemente grande. Calculemos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{k!} (1 - \frac{1}{2^k})^{n-k} &= \frac{1}{k!(1 - \frac{1}{2^k})^k} \lim_{n\to\infty} n^k (1 - \frac{1}{2^k})^n \\
&= \frac{1}{k!(1 - \frac{1}{2^k})^k} \lim_{n\to\infty} e^{k \log n + n \log(1 - \frac{1}{2^k})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para n suficientemente grande siempre se tiene que

$$\mathbb{P}[\bigcup_{|S|=k} E_S^c] < 1$$

$\blacksquare$

P7 Auxiliar 4

Pruebe la identidad combinatorial de Fermat combinatorialmente:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$$

Solución:
Supongamos que tenemos n personas y queremos contar la cantidad de comités de tamaño k que podemos formar.
Es lo mismo que contar la cantidad de subconjuntos de tamaño k, que es lo que cuenta el lado izquierdo.
Para contar el lado derecho, supongamos que las personas van llegando de a uno y contamos cuantos comités podemos formar cuando llega cada persona. Las primeras $k-1$ personas no pueden formar ningún comité. Si la i-ésima persona que llega después quiere formar un comité de tamaño k, tiene que elegir $k-1$ personas de las $i-1$ que ya llegaron. Esto lo puede hacer de $\binom{i-1}{k-1}$ formas. $\blacksquare$