CC3101 - Matemáticas Discretas para la Computación
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliar: Christian Von Borries

Auxiliar N°3

16 de Abril de 2014

P1) A un cumpleaños van n personas (con $n \geq 2$). La comida está servida en una mesa redonda, y cada puesto tiene un cartelito con el nombre de la persona. Sin embargo, los invitados se sientan sin prestarle mayor atención a los cartelitos y nadie se sienta en su lugar correcto. Demuestre que se puede girar la mesa de tal forma que al menos dos personas quedan sentados en su lugar correspondiente.

P2) Sean A y B conjuntos finitos, con $|A| = |B|$, y sea $f : A \to B$ una función. Muestre que f es inyectiva ssi f es sobreyectiva.

P3) Sea $n \geq 1$ y S un subconjunto de tamaño $n+1$ de $\{1, \ldots, 2n\}$.

a) Muestre que existen dos elementos coprimos en S (a y b se dicen coprimos si $\text{mcd}(a, b) = 1$).

b) Muestre que existen dos elementos de S tal que uno es múltiplo del otro.

P4) Sea $x \in \mathbb{R}$ y n un entero positivo mayor que 1. Demuestre que existe un entero j tal que $1 \leq j \leq n$ y el valor absoluto de la distancia de jx al entero más cercano a jx es menor que $\frac{1}{n}$.

P5) Sea n un natural impar y $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ una biyección. Muestre que el producto $(1-\pi(1))(2-\pi(2))\ldots(n-\pi(n))$ es par.

P6) Considere n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no necesariamente distintos. Entonces existen k y l con $1 \leq k \leq l \leq n$ tales que $\sum_{i=k}^{l} a_i$ es un múltiplo de n.

P7) Muestre que si se escogen $2^{n-1}+1$ subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$, existen dos subconjuntos tales que uno es el subconjunto del otro.

P8) Los números del 1 al 36 han sido distribuidos en una ruleta (o sea, circularmente). Muestre que existen 3 números consecutivos cuya suma es mayor o igual a 55.

P9) Sea S el conjunto de todos los strings en $\{0, 1\}$. Intentando modelar un algoritmo que comprime datos del computador, sea

$$\begin{aligned} f : S &\to S \\ s &\mapsto f(s) \end{aligned}$$

una función.

Denotaremos el largo de un string s como $|s|$. Queremos que f comprima todos los archivos, o sea $|f(s)| \leq |s|$ para cualquier s. Además, como queremos poder descomprimir los archivos, f es biyectiva. Muestre que en realidad f no comprime, o sea que $|f(s)| = |s|$ para cualquier s.

Conclusión: Para cualquier algoritmo de compresión de datos que haga que un string sea más corto, también habrá strings que terminen siendo más largos.