MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto

Problemas Controlables (parte 4).

Problema 23. Reducciones polinomiales

Recordemos que un ciclo Hamiltoniano es un ciclo que pasa por todos los vértices (o nodos si G es dirigido). Paseos, Caminos y s-t caminos hamiltonianos son definidos de manera análoga. Un TSP-Tour (TSP viene de "traveling salesman problem") es un paseo **cerrado** que visita todos los nodos *al menos* una vez. El largo de un TSP-Tour es la suma de los largos de los arcos que visita (el largo de un arco se suma tantas veces como este sea visitado).

(a) Definamos

$$\begin{aligned}
\textbf{HAM-CYCLE} &= \{\langle G\rangle \colon G \text{ grafo no dirigido, tiene un ciclo hamiltoniano}\}.\\
\textbf{HAM-PATH} &= \{\langle G\rangle \colon G \text{ grafo no dirigido, tiene un camino hamiltoniano}\}.\\
\textbf{HAM-}s\textbf{-}t\textbf{-PATH} &= \{\langle G\rangle \colon G \text{ grafo no dirigido, tiene un } s\text{-}t \text{ camino hamiltoniano}\}.\\
\textbf{TSP} &= \{\langle G, w, k\rangle \; G \text{ grafo no dirigido, } w\colon E \to \mathbb{R} \text{ tiene un TSP-tour } T \text{ de largo } w(T) \le k\}.
\end{aligned}$$

Pruebe que

$$\textbf{HAM-PATH} \le_P \textbf{HAM-}s\textbf{-}t\textbf{-PATH} \le_P \textbf{HAM-CYCLE} \le_P \textbf{TSP},$$

Pruebe también que **TSP** está en NP.

Usando que **HAM-PATH** es NP-completo, deduzca que los 4 problemas propuestos son NP-completos.

(b) Sea G un grafo no dirigido simple y $U \subseteq V(G)$. Decimos que

$$\begin{aligned}
U \text{ es un cubrimiento por vértices} &\quad \text{si todo } e \in E \text{ tiene un extremo en } U.\\
U \text{ es un conjunto independiente} &\quad \text{si } G[U] \text{ no tiene aristas.}\\
U \text{ es un clique} &\quad \text{si } G[U] \text{ es un grafo completo.}
\end{aligned}$$

Sean **mVC**, **MIS** y **MC**, los problemas de decisión asociados a encontrar un cubrimiento por vértices de tamaño mínimo, un conjunto independiente de tamaño máximo y un clique de tamaño máximo respectivamente.

Demuestre que estos 3 problemas son equivalentes bajo reducciones polinomiales.

Problema 24. k-centros y conjuntos dominantes.

(a) Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido completo, y $d\colon E \to \mathbb{Q}$ una función no negativa que satisface la desigualdad triangular (una distancia, con la excepción que algunas aristas podrían tener $d(e) = 0$). Para $v \in V$ y $r > 0$, la bola de centro v y radio r, está dada por $B(v, r) = \{w \in V \colon d(wv) \le r\}$. Dado un conjunto S, el *radio cubridor* de S es el mínimo valor r_S tal que $V = \bigcup_{v\in S} B(v, r_S)$. Los vértices de S se denominan centros y las bolas $B(v, r_S)$ con $v \in S$ se denominan *clusters*.

El problema de los k-centros es el siguiente.

Entrada: Grafo G, función d y entero k.
Salida: Conjunto $S \subseteq V$ de tamaño igual a k de mínimo radio cubridor.

Considere el siguiente algoritmo glotón para encontrar un S. Elegir el primer centro $v \in S$ de manera arbitraria. Mientras $|S| \le k$, agregar a S el vértice w *más lejano a* S, es decir aquel w que maximiza

$$d(w, S) := \min_{v\in S} d(w, v).$$

Demostrar que este algoritmo es una 2-aproximación para el problema de los k-centros.

Indicación: Sea OPT una solución óptima y sea S la solución encontrada por el algoritmo. Vea primero el caso donde todos cada centro de S está en un cluster distinto de OPT. Analice después el caso donde dos centros de S caen en el mismo cluster de OPT.

(b) Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un conjunto $U \subseteq V$ se dice *dominante* si todo v que no está en U tiene un vecino en U. El problema de decisión para el conjunto dominante de tamaño mínimo. Es decir

$$\{\langle G, k\rangle : G \text{ admite un conjunto dominante de tamaño a lo más } \ell\}$$

es NP-completo.

Demuestre que si existe un algoritmo polinomial de aproximación para el problema de los k-centros que garantice una α-aproximación, con $\alpha < 2$ entonces P = NP.
Indicación: Dado $H = (V, E)$ grafo considere la función de distancias para pares de vértices dada por

$$d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } uv \in E, \\ 2 & \text{si } uv \notin E. \end{cases}$$

Problema 25. Set-Cover
Sea V una familia de objetos y $\mathcal{S} \subseteq 2^V$ una familia de conjuntos tal que $\bigcup_{U\in\mathcal{S}} U = V$. Un cubrimiento por conjuntos (o *set-cover*) es una familia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ tal que todo elemento de v está en algún conjunto en $\mathcal{T}$. Sea $w \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ una función de peso positiva en los conjuntos. Sea además $f = \text{máx}_{U\in\mathcal{S}} |U|$.

a) Escriba un programa entero que resuelva set-cover de peso mínimo usando variables $x_U : U \in \mathcal{S}$ que indiquen si el conjunto U es elegido. Considere el siguiente algoritmo: Sea x^* una solución óptima de la relajación lineal natural del programa anterior sin agregar la restricción redundante $x_U \leq 1$ (¿Por qué es redundante?). El algoritmo devuelve $\mathcal{T} = \{U : x^*_U \geq 1/f\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ es un set-cover y que es una f-aproximación.

b) Considere ahora el algoritmo glotón siguiente: Sea $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ que representa la familia de conjuntos elegidos hasta el momento. Sea además $N \leftarrow V$ que representa los objetos actualmente cubiertos por $\mathcal{T}$. Mientras N no sea vacío, agregue a $\mathcal{T}$ el conjunto $U \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$ que minimiza al densidad residual $w(U)/|N \cap U|$ y actualice N. Demuestre que la familia devuelta es una $O(\log n)$-aproximación para set-cover de peso minimo.

   Indicación: Sean $U_1, \ldots, U_k$ a los conjuntos devueltos por el algoritmo, en el orden en el que fueron agregados a $\mathcal{T}$ y sea t_i la densidad residual de U_i en el momento de ser agregado. Para cada $v \in V$, defina $t(v)$ como t_i, donde i es el menor índice tal que $v \in U_i$. Muestre primero que $\sum_{i=1}^{k} w(U_k) = \sum_{v\in V} t(v)$. Numere los elementos de V como $v_1, \ldots, v_n$ en el orden en que fueron eliminados de N (rompiendo empates de manera arbitraria) y muestre que $t(v_i) \leq v(\text{OPT})/(n - i + 1)$. Concluya la demostración usando que el número harmónico $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \Theta(\log n)$.

Problema 26 Algoritmos aleatorizados

a) Consideremos nuevamente el problema de cubrimiento por vértices de peso mínimo (vertex-cover de peso mínimo). Dado $G = (V, E)$ un grafo y $w \colon V \to \mathbb{R}_+$ una función de peso en los nodos queremos encontrar un cubrimiento $S \subseteq V$ de peso $w(S)$ lo más pequeño posible. Considere el algoritmo aleatorio siguiente.

   - $S \leftarrow \emptyset$.
   - Para todo $e = (u, v) \in E$ (en cualquier orden):
     - Si e aún no está cubierto por S entonces.
       - Con probabilidad $\frac{w(u)}{w(u)+w(v)}$, tomar $x = u$. De otra forma (i.e., con probabilidad $\frac{w(v)}{w(u)+w(v)}$), tomar $x = v$.
       - Agregar x a S.
   - Devolver S.

Sea OPT un cubrimiento óptimo. Demuestre que en todo momento

$$\mathbb{E}[w(\mathrm{OPT} \cap S)] \geq \mathbb{E}[w(S \setminus \mathrm{OPT})],$$

y concluya usando esto que el algoritmo anterior es una 2 aproximación.

b) Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables binarias. Un *literal* es o bien una variable x_i o su negación $\bar{x}_i$. Una k-*cláusula* es la disjunción de k literales asociados a variables distintas. Ejemplo $C = (x_1 \vee \bar{x_7} \vee x_9)$ es una 3-cláusula.

   Denotemos por k-función booleana a una función $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ expresada como la conjunción de k-cláusulas.

   El problema de optimización **exact-MAX-k-SAT** toma como entrada una k-función booleana φ. El objetivo es encontrar una asignación de las variables x de modo que la cantidad de cláusulas de φ satisfechas (verdaderas) sea maximizada.

   Diseñe un algoritmo aleatorizado que de una $1 - 1/2^k$-aproximación para **exact-MAX-k-SAT**.

c) Use el método de esperanzas condicionales para desaleatorizar el algoritmo de la parte anterior.

d) Set-Cover nuevamente.
   En este problema construiremos un algoritmo aleatorizado que, dado c constante, devuelve una familia $\mathcal{T}$ cuyo peso esperado es $O(c \ln |V|)$ veces el peso del óptimo set-cover y además, $\mathcal{T}$ cubre todos los elementos de V con probabilidad al menos $(1 - 1/|V|^c)$.

   Sea x^* una solución óptima para la siguiente relajación lineal.

$$\begin{aligned} \min \sum_{U \in \mathcal{S}} x_U w_U & \\ \sum_{U \in \mathcal{S}:\, v \in U} x_U &\geq 1, \text{ para todo } v \in V \\ 0 \leq x_U &\leq 1, \text{para todo } U \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

   Considere el siguiente experimento: crear la familia $\mathcal{T}$ incluyendo independientemente cada conjunto U en $\mathcal{T}$ con probabilidad x^*_U.

   Demuestre que cada $v \in V = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$ es cubierto por $\mathcal{T}$ con probabilidad al menos $1 - 1/e$.

   Considere ahora el siguiente algoritmo. Sean $\mathcal{T}_1, \ldots \mathcal{T}_K$ una secuencia de K familias obtenidas repitiendo independientemente el experimento anterior. Devuelva la union $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{T}_i$ de las familias.

   Usando la cota de la unión para probabilidades, demuestre que $\mathcal{T}$ cubre a todos los elementos de V con probabilidad al menos $1 - n(1/e)^K$, donde $n = |V|$. Argumente además que el peso esperado de $\mathcal{T}$ es a lo más K veces el peso del óptimo.

   Eligiendo K de manera apropiada, concluya lo deseado.