MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°16

13 de Diciembre de 2013

P1) **MAX-SAT** Una fórmula de lógica proposicional es una función $\phi(x) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ que se arma con variables x_i, los operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y paréntesis, por ejemplo $((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge \neg x_2$. Un literal es una variable x_i o su negación $\neg x_i$ y llamamos cláusula a una disjunción de literales como $(\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_2)$.

Diremos que una fórmula está en CNF si es una conjunción de cláusulas, o en palabras simples es un Y de Os, como por ejemplo.

$$\phi(x) = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_5 \vee x_4)$$

Es sabido que el problema: dado una fórmula en CNF decidir si existe x tal que $\phi(x) = 1$ es NP-completo. Nos interesa entonces buscar un algoritmo de aproximación que maximice la cantidad de cláusulas verdaderas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada variable está a lo más una vez en cada cláusula.

a) Considere el algoritmo aleatorio que a cada variable le asigna independientemente 0 o 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$. Muestre que en esperanza este algoritmo tiene un factor de aproximación $\frac{1}{2}$.

b) Usando el método de esperanzas condicionales, desaleatorice el algoritmo anterior para encontrar un algoritmo con factor de aproximación $\frac{1}{2}$.

c) También podemos escribir un LP equivalente. Si tenemos m cláusulas y n variables, definiendo $y_i = 1$ si x_i es verdadero y 0 si no para $i = 1, \ldots, n$, y $z_j = 1$ si la cláusula C_j es verdadera y 0 si no para $j = 1, \ldots, m$, entonces el problema es equivalente a calcular:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{m} z_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{i:x_i \in C_j} y_i + \sum_{i:\neg x_i \in C_j} (1 - y_i) \geq z_j & \forall\, j = 1, \ldots, m \\ & y_i, z_j \in \{0,1\} & \forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Considere el algoritmo que calcula (y^*, z^*), solución óptima al LP relajado anterior y que redondea x_i a 1 con probabilidad y_i^*. Muestre que este algoritmo tiene factor de aproximación $1 - \frac{1}{e}$.

P2) **Max-Cover** Sean X un conjunto de n elementos, $w : X \to \mathbb{R}^+$ una función de pesos, $\mathcal{S} = S_1, \ldots, S_m$ una colección de conjuntos tal que $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = X$ y $k \leq m$. Queremos encontrar una colección $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k} \subseteq \mathcal{S}$ que maximice el peso $w(\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j})$. Es sabido que este problema es NP-completo.

Considere el algoritmo glotón que en cada iteración elige el conjunto S_i que más aumenta el peso.

a) Sea S_{i_p} el p-ésimo conjunto agregado por el algoritmo y sea $x_p = w(\bigcup_{j=1}^{p} S_{i_j}) - w(\bigcup_{j=1}^{p-1} S_{i_j})$ el aumento a la solución en la iteración p-ésima. Si llamamos OPT al peso de la solución óptima, muestre que

$$x_{p+1} \geq \frac{\text{OPT} - w(\bigcup_{j=1}^{p} S_{i_j})}{k}$$

b) Usando lo anterior demuestre por inducción que

$$\text{OPT} - w(\bigcup_{j=1}^{p} S_{i_j}) \leq (1 - \frac{1}{k})^p \text{OPT}$$

c) Concluya que el algoritmo es una $(1 - \frac{1}{e})$-aproximación.