MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Felipe Contreras y Emilio Molina
Fecha: 15 de Noviembre de 2013.

Cátedra 22

1. Método de la Elipsoide

Originalmente, fue propuesto por N. Shor ('70) en el contexto de optimización convexa. En 1979, Khachiyan mostró, que haciendo ciertos cambios, este método corre en tiempo polinomial para optimizar PL. Aún así, en la práctica este método no es muy bueno porque se demora mucho.
Dado K convexo y cerrado en $\mathbb{R}^d$ (de una manera implícita que se verá más adelante), con K satisfaciendo ciertas hipótesis mínimas, este método puede o bien certificar que K es vacío o encontrará $x^* \in K$.

Definición. Un Oráculo de separación para $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es un algoritmo que dado un punto $z \in \mathbb{R}^d$, certifica que $z \in K$ o encuentra un hiperplano separador, es decir, encuentra $a \in R^d$ tal que $a^T x \langle a^T z, \forall x \in K$.
Diremos que el oráculo es polinomial si, dados

- $N = \#$ bits del problema original,
- $d =$ dim. del espacio,
- $\langle z \rangle = \#$bits necesarios para codificar z,

éste es polinomial en $N, d, \langle z \rangle$.

Ejemplo. 1. $K = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ con A, b dados. Un oráculo de separación para K, dado $z \in \mathbb{R}^d$ es el siguiente

   - Se denota a_i a la fila i-ésima de A.
   - Revisar para todo i si $a_i^T z \leq b$.
   - Si es cierto, respondemos $z \in K$.
   - Si no, devolvemos el a_i donde falla.

2. Dado $G = (V, E)$, $d = |E|$. $K = \{x \in \mathbb{R}^d : x(\delta(S)) \geq 1, \forall \varnothing \subsetneq S \subsetneq V, x \geq 0\}$. Si queremos un oráculo polinomial, no podemos revisar todas las desigualdades, pues hay una cantidad exponencial de ellas. Sin embargo, podemos hacer lo siguiente:

   - Revisar si $z \geq 0$.
   - Revisar si $\min_{\varnothing \subsetneq S \subsetneq V} z(\delta(S)) \geq 1$. Para ello, basta calcular el corte global mínimo S^* con respecto al vector de capacidades z y revisar si $z(\delta(S^*)) \geq 1$. Si no lo es, devolver el hiperplano $x(\delta(S^*))$.

Definición. Una elipsoide $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal afín invertible de $B(0, 1)$.

Ejemplo. Si $T(x) = Mx + b$ con M invertible,

$$T(B(0,1)) = \{T(x) : x^T x \leq 1\} = \{y : (M^{-1}(y-b))^T (M^{-1}(y-b)\} = \{y : (y-b)^T ((M^{-1})^T M^{-1})(y-b) \leq 1\}$$

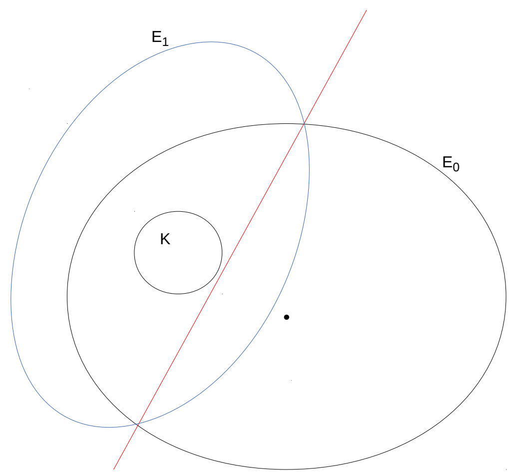
Si llamamos $A = MM^T$, entonces $T(B) = \{y : (y-b)A^{-1}(y-b) \leq 1\}$. A esta elipsoide la llamaremos $E(b, A)$, donde A es definida positiva. De hecho toda elipsoide se puede escribir de esta manera.

Proposición 1.
- $B(0, r) = E(0, r^2 I)$.
- *Una elipsoide alineada con semiradios* r_i *es* $E\left(0, \begin{pmatrix} r_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & r_d^2 \end{pmatrix}\right)$.
- $Vol(E(b, A)) = Vol(B(0,1))\sqrt{\det A} = Vol(B(0,1)) \prod \sqrt{\lambda_i}$, *donde* λ_i *son los valores propios de* A.

Método de Elipsoide

DATOS: Convexo cerrado K con oráculo de separación. Se supondrá que se tienen p, R tales que $K \subseteq B(p,R)$ y l tal que si $K \neq \varnothing$, entonces $Vol(K) \geq l$. Alternativamente, se puede dar un r tal que si $K \neq \varnothing$, entonces existe $c \in K$ tal que $B(c,r) \subseteq K$.

$E \leftarrow B(p,R)$;
while $Vol(E) \rangle l$ **do**
  if *p (centro de E) está en K* **then**
    Devuelve p;
  end
  else
    Usar oráculo para encontrar c tq $K \subseteq E \cap \{x : c^T x \leq c^T p\}$;
    $E \leftarrow$ el elipsoide de volumen mínimo que contiene $E \cap \{x : c^T x \leq c^T p\}$;
  end
end
return "$K = \varnothing$"



Lema 1 (de la media elipsoide)**.** *$E(a,A) \cap \{x : c^T x \leq c^T a\}$ está contenida en $E' = E(a',A')$ con $a' = a - \dfrac{b}{d+1}, A' = \dfrac{d^2}{d^2-1}\left(A - \dfrac{2}{d+1} bb^T\right)$ con $b = \dfrac{Ac}{\sqrt{c^T A c}}$ y $\dfrac{Vol(E')}{Vol(E)} \leq e^{\frac{-1}{2d}}$.*

Observación. *Si usamos este método de manera exacta, entonces en la i-ésima iteración, para la elipsoide actual (E_i), tenemos*

$$\frac{Vol(E_i)}{Vol(E_0)} = \prod_{j=1}^{i} \frac{Vol(E_j)}{Vol(E_{j-1})} \leq e^{\frac{-i}{2d}}.$$

Luego, si $i > 2d \ln\left(\frac{Vol(E_0)}{l}\right)$, entonces $Vol(E_i) < l$. Luego, el algoritmo termina usando $O\left(d \ln\left(d \frac{Vol(E_0)}{l}\right)\right) = O\left(d^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right)$ trabajo y llamadas al oráculo.

Veamos ahora como reducimos un problema de optimización en un problema de factibilidad.
Idea 1: Queremos $\min_{x \in K} w^t x$. Podemos revisar $K_v = K \cap \{x : w^T x \leq v\}$ y hacer búsqueda binaria en v.
Idea 2: Para programación lineal dada por $\min\{w^T x : Ax \leq b\}$, se tiene que si x^* es óptimo, entonces existe y^* óptimo para $\max\{b^t y : A^T y = w, y \geq 0\}$ tq $w^T x^* = B^t y^*$. Entonces la idea es buscar $\binom{x}{y} \in \{Ax \leq b, A^T y = w, y \geq 0, w^T x = c^T y\}$. El problema aquí es que puede ser un punto y no tener volumen.

Teorema 1. *Si K es convexo cerrado en $\mathbb{R}^d$, dado por oráculo de separación polinomial, y R, r son como en las hipótesis, entonces el método de la elipsoide resuelve factibilidad en K en $O\left(d^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right)$ iteraciones.*
Además, usando la Idea 1, se puede encontrar $x \in K$ tq $w^T x^* \leq w^T x \leq w^T x + \epsilon$, donde x^* es mínimo de $\{w^T x : x \in K\}$, en tiempo polinomial en $\langle c \rangle$ y $\dfrac{1}{\epsilon}$.

Teorema 2 (Khachiyan)**.** *Sean $P = \{x : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{Z}^{m\times d}, b \in \mathbb{R}^m$ y U el valor absoluto del coeficiente más grande de A y b. Luego, el método elipsoidal resuelve factibilidad en tiempo polinomial en m, d y $\log U$. Además, si $c \in \mathbb{Z}^d$, podemos optimizar $c^T x$ en P usando un número polinomial en $\log(C_{MAX}), d$ y $\log U$ de llamadas al método elipsoidal que revisa factibilidad.*

Teorema 3. *Sean $S \subseteq \{0,1\}^d$, $P = \text{conv}(S)$ dada por un oráculo de separación polinomial. Si P es de dimensión completa, entonces podemos encontrar un vértice óptimo de P para $\text{mín}\{c^T x : x \in P\}$ en tiempo polinomial usando $O(d^3 \log(dc_{MAX}))$ trabajo y llamadas al oráculo de separación.*