MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto

Problemas Controlables (parte 3).

Problema 16. [Teoremas de Menger].

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, y s y t dos vértices distintos de V. Un s-t *camino* es un camino en G dirigido desde s hasta t. Dos s-t caminos P_1, P_2 se dicen *arco-disjuntos* si $E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$. Dos s-t caminos P_1, P_2 se dicen *internamente disjuntos* si $V(P_1) \cap V(P_2) = \{s, t\}$.

Un s-t *corte* es un conjunto $S \subseteq V$ tal que $s \in S$ y $t \notin S$. Un s-t *separador* es un conjunto $S \subseteq V - \{s, t\}$ tal que t no es alcanzable desde s en $G \setminus S$.

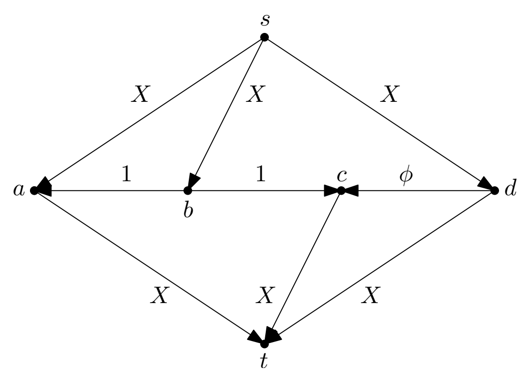
Demuestre que los teoremas siguientes son equivalentes (es decir, muestre como deducir uno a partir de otro).

1. Suponga que s y t no son adyacentes. Entonces el número máximo de s-t caminos internamente disjuntos par a par es igual al tamaño mínimo de un s-t separador.

2. Sean s y t arbitrarios. Entonces el número máximo de s-t caminos arco-disjuntos par a par es igual al número mínimo de arcos de un s-t corte.

Problema 17. Demuestre directamente el teorema de König sobre matchings y cubrimientos de vértices en grafos bipartitos, usando el teorema de flujo máximo y corte mínimo, y la existencia de flujos integrales.

Problema 18. Una mala selección de caminos aumentantes en un grafo con capacidades irracionales puede hacer que el algoritmo de Ford-Fulkerson itere por siempre (encontrando caminos aumentantes con menor capacidad residual). En este problema usted probará que en algunos casos existen secuencias infinita de aumentos que no convergen a un flujo máximo. Considere el grafo G con 6 nodos y 9 arcos cuyas capacidades están indicadas en la figura.



Aquí, X es un entero suficientemente grande ($X \geq 7$ funciona) y $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$, elegido de modo que $1 - \phi = \phi^2$.

Apliquemos el algoritmo de Ford-Fulkerson a la red (G, u, s, t) recién indicada. Llame $f^i : E \to \mathbb{R}_+$ al vector de flujo en la iteración i-ésima del algoritmo y $x_i = (u_{ba} - f^i_{ba}, u_{bc} - f^i_{bc}, u_{dc} - f^i_{dc})$ a las capacidades residuales de los arcos centrales. Al comenzar, f^0 es el vector 0 y $x_0 = (1, 1, \phi)$.

Suponga que Ford-Fulkerson usa primero el camino *sbct*, de modo que $x_1 = (1, 0, \phi) = (\phi^0, 0, \phi^1)$.

1. Suponga inductivamente que $x_{4j+1} = (\phi^{2j-2}, 0, \phi^{2j-1})$ para un número natural j. Encuentre una secuencia de 4 caminos aumentantes que lleven a que $x_{4(j+1)+1} = (\phi^{2j}, 0, \phi^{2j+1})$.
Indicación: En cada iteración, el valor del flujo aumenta en una potencia entera de ϕ. Note que $\phi^k = \phi^{k+1} + \phi^{k+2}$.

2. Calcule valor(f^i), usando la misma secuencia de caminos encontrada en la parte anterior y muestre que

$$\lim_{i\to\infty} \text{valor}(f^i) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \phi^j.$$

3. Concluya que el flujo obtenido al aumentar la secuencia de caminos anteriores no converge a un flujo máximo.

Indicación: La forma indicada no es la única manera de resolver el problema.

Problema 19. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y conexo. Un *corte por aristas* es un conjunto $F \subseteq E$ de aristas tal que $G \setminus F$ es disconexo. Un *corte por vértices* (que es lo que usualmente llamamos "corte") es un conjunto de vértices S tal que $\delta(S)$ es un corte por aristas de G.

Suponga que $u\colon E \to \mathbb{R}_+$ es una función de capacidades en las aristas no negativas.

- Demuestre que para todo corte por aristas F existe un corte S tal que $u(F) \geq u(\delta(S))$ y deduzca que existe un corte por aristas de capacidad mínima que además es corte por vértices (éste corte S es llamado *corte mínimo global de* G).
- Mediante un ejemplo muestre que lo anterior no es válido si se permiten capacidades negativas.
- Un grafo no dirigido H se dice k-arista-conexo si entre cada par de vértices v y w, existen al menos k v-w caminos disjuntos por aristas. El valor *máximo* de k tal que H es k-arista-conexo se conoce como la *conectividad por aristas* de G. Diseñe un algoritmo que calcule la conectividad por aristas de H (si H no es conexo, entonces la conectividad es 0).

Problema 20.

a) Sea V un conjunto finito y sea $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ una función. Sea Π una partición de V, es decir, $\Pi = \{V_i : i \in [k]\}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $V_i \neq \emptyset$, $\bigcup_{i\in[k]} V_i = V$. Además, dado $X \subseteq [k]$, definimos $V_X = \bigcup_{i\in X} V_i$.

   Se define la fusión de f asociada a Π como la función $f_\Pi\colon 2^{[k]} \to \mathbb{R}$ dada por $f_\Pi(X) = f(V_X)$, para todo $X \subseteq [k]$. Demuestre que si f es submodular entonces f_Π es submodular, y que si f es simétrica entonces f_Π también es simétrica.

b) Sea $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ submodular no necesariamente simétrica. Sea $\mathcal{M} = \arg\min_{\emptyset\subseteq X\subseteq V} f(X)$ el conjunto de los minimizadores de f en 2^V. Demuestre que si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ están en $\mathcal{M}$. Deduzca que existen a lo más $n = |V|$ conjuntos en $\mathcal{M}$ minimales para inclusión.

Problema 21.

Una función $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ se dice posimodular si $f(X \setminus Y) + f(Y \setminus X) \leq f(X) + f(Y)$.

Sea f una función que es simultáneamente submodular y posimodular. Sea s un elemento nuevo, fuera de V. Para $X \in 2^{V+s}$ defina

$$\tilde{X} = \begin{cases} X, & \text{si } s \notin X, \\ V \setminus (X - s), & \text{si } s \in X. \end{cases},$$

y defina la función $\tilde{f}\colon 2^{V+s} \to \mathbb{R}$ como $\tilde{f}(X) = f(\tilde{X})$.

a) Demuestre que $\tilde{f}$ es submodular y simétrica en 2^{V+s}.

b) Sea $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ un orden de máxima adyacencia de $V + s$ para $\tilde{f}$, donde $v_1 = s$ (recuerde que el primer elemento de este orden puede ser elegido de manera arbitraria). El teorema de Queyranne implica que (v_{n+1}, v_n) es un par colgante de $\tilde{f}$. Deduzca que (v_{n+1}, v_n) es un par colgante de la función original f.

c) Concluya que existe algoritmo polinomial para encontrar un mínimo de f en $2^V \setminus \{\emptyset, V\}$, cuando f es submodular y posimodular. Calcule su complejidad (y cuantas llamadas al oráculo de f necesita realizar).

d) Muestre que si g es suma de una función submodular simétrica con una función modular entonces g es submodular y posimodular. Concluya que g se puede minimizar sobre $2^V \setminus \{V, \emptyset\}$ en tiempo polinomial.

Problema 22. Una forma (ineficiente) de resolver s-t corte mínimo en un grafo dirigido $G = (V, E)$ con $u \colon E \to \mathbb{R}_+$ involucra resolver el programa lineal

$\text{mín}\{u^T x \colon x \in P_{s,t}\}$ con $P_{s,t} = \{x \in \mathbb{R}^E \colon \sum_{e \in P} x_e \geq 1, \forall P \text{ } s\text{-}t \text{ camino}\}$

Diseñe un oráculo de separación polinomial para $P_{s,t}$.