MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°13

21 de noviembre de 2013

P1. [Klee-Minty, 1973] Dado n y $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, considere el problema lineal dado por

$$(P_{n,\varepsilon}) \quad \begin{cases} \text{máx} & & x_n & & \\ \text{s.a} & 0 \leq & x_1 & \leq 1 & \\ & \varepsilon x_{i-1} \leq & x_i & \leq 1 - \varepsilon x_{i-1} & 1 < i \leq n \end{cases}$$

Muestre que, partiendo desde el vértice $(0, \ldots, 0)$, existe una secuencia de vértices que recorre todos los vértices del poliedro y en cada paso aumenta estrictamente la función objetivo. Usando esto, concluya que para una elección adecuadamente mala de los vértices, el algoritmo Símplex no termina en tiempo polinomial en la cantidad de desigualdades ni en la dimensión.

(Notemos que este «mal caso» depende fuertemente de *la forma en que elijamos el siguiente vértice* en cada paso. Podría suceder que en una variación de Símplex, el algoritmo siempre llegara en una cantidad polinomial de pasos al óptimo. Si bien se conocen formas de elegir los vértices que funcionan bien *en este caso en particular*, para todas las maneras de escoger los vértices se ha encontrado algún *otro* poliedro que funciona mal en ese caso.)

P2. [P2-C1-2011] El *problema del escape* consiste en lo siguiente: recibe como entrada un natural n (que define una grilla de $n \times n$) y m pares de puntos $(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)$ ubicados en la grilla (tal que $1 \leq i_k, j_k \leq n$ para todo $1 \leq k \leq m$). Debe retornar Factible si existen $P_1, P_2, \ldots, P_m$ caminos nodo-disjuntos tal que para todo $1 \leq k \leq m$, el camino P_k une (i_k, j_k) con algún punto en el borde de la grilla (o sea, un punto (i, j) tal que $\{i, j\} \cap \{1, n\} \neq \emptyset$). En caso contrario, debe retornar Infactible.

Dé un algoritmo polinomial en m y en n para resolver el problema del escape y establezca su correctitud.

P3. [Gale-Ryser, 1957] Sean $(a_1, \ldots, a_m)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ listas de números no negativos tales que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$ y $b_1 \geq \cdots \geq b_n$.

Muestre que existe un grafo bipartito $G = (A \cup B, E)$ tal que los vértices del lado A tienen como grados a $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ y los vértices del lado B tienen como grados a $(b_1, \ldots, b_n)$; si y sólo si se cumple que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} \text{mín}\{b_j, k\} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, m\}$$

Indicación: Para ver que la condición es suficiente, forme una red usando como capacidades los valores a_i y b_j, y aplique Teorema de Flujo Máximo y Corte Mínimo.