MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Roberto Bobadilla y Chaparrón Bonaparte (Nicolás Torres).
Fecha: Viernes 8 de Noviembre, 2013.

Cátedra 20

1. Cortes mínimos globales

Consideremos G un grafo no dirigido y conexo, $w : E \to \mathbb{R}$. Queremos encontrar $\emptyset \neq S \neq V$ tal que $w(\delta(S))$ sea mínimo.
Un posible algoritmo sería el siguiente:

1. Fijar $s \in V$.
2. Sustituir cada arista por dos arcos antiparalelos de igual peso.
3. Encontrar el mejor s-t corte variando t en $V - s$.

Pero esto es costoso en términos de tiempo: $O(n)O(T(s - t \text{ corte}))$.
La siguiente idea se debe a Nagamachi e Ibaraki y fue posteriormente desarrollada por Stoer y Wagner:

Definición 1. Diremos que (S, s, t), $S \subset V$, $s \in S$, $t \in V - s$ es un trío factible si S es un $s - t$ corte mínimo en el grafo no dirigido G.

Observación: Si X es corte minimo global y (S, s, t) trio factible, tenemos dos casos posibles:

1. Caso 1: X separa s de t. Como (S, s, t) es trío factible S es el mínimo $s - t$ corte, por lo tanto $w(\delta(S)) = w(\delta(X))$.
2. Caso 2: X no separa s de t, podemos fusionar s y t en un nodo y calcular el corte mínimo del grafo resultante, como X no separa a s de t entonces estará entre los cortes mínimos del grafo resultante de fusionar estos nodos.

La observación anterior inspira el siguiente algoritmo recursivo para el corte mínimo.

Algorithm 1 Corteminimo(G,w)

Require: $G = (V, E)$ grafo no dirigido y conexo. $w : E \to \mathbb{R}$ función de peso.
  if $|V(G)| = 2$ $(V = \{s, t\})$ **then**
    Devolver $\{s\}$;
  end if
  if $|V(G)| \geq 3$ **then**
    Encontrar trío factible (S, s, t).
    $(G', w') \leftarrow G$ con s y t fusionados.
    X' corte mínimo en (G', w').
    X: conjunto que queda de expandir el vértice fusionado.
    Devolver menor entre X y S (En el sentido de comparar $w(\delta(X)$ con $w(\delta(S))$.
  end if

El algoritmo anterior se puede implementar en la medida que podamos encontrar tríos factibles.
Observación: La función $f(S) = w(\delta(S))$ es submodular y simétrica, ie: $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y)$ y $f(X) = f(V \setminus X)$.
Estamos tratando de encontrar $\emptyset \neq S \neq V$ con $\min f(S)$. Queyranne (1998) observó que el paso (*) se puede resolver rápido para f submodular simétrica arbitraria.

Definición 2. Diremos que un conjunto S es $s - t$ separador si $|S \cap \{s, t\}| = 1$

Observación: Sea $f : 2^V \to \mathbb{R}$ función submodular y simétrica, definimos la bifunción de adyacencia como sigue:

$$d : 2^V \times 2^V \to \mathbb{R}$$

.

$$d(A,B) = \frac{1}{2}(f(A) + f(B) - f(A \cup B)).$$

Observación: Si $f(S) = w(\delta(S))$ en un grafo y A, B son conjuntos disjuntos, entonces $d(A,B) = \frac{1}{2}(w(\delta(A)) + w(\delta(B)) - w(\delta(A \cup B)))$, es decir $d(A,B) = w(E(A:B))$ esto es porque en el primer sumar $w(\delta(A)) + w(\delta(B))$ cuenta dos veces arcos entre A y B y restar $w(\delta(A \cup B)))$ resta solo una vez estos arcos y además cancela a los arcos que salen de A pero no a B y viceversa.
Volvamos al caso f general (submodular y simétrica). Mader (1978) probó que para toda función submodular simétrica $f : 2^V \to \mathbb{R}$ existe un par ordenado $(s,t) \in V \times V$ tal que $f(\{s\}) = \text{mín}_{S: s-t \ separador} f(S)$ $(**)$.
Caso de grafos: Existe un par de nodos s y t tal que el $s-t$ corte mínimo es el singleton $\{s\}$.

Definición 3. Sea $f : 2^V \to \mathbb{R}$ función submodular y simétrica. A un par (s,t) que satisfaga $(**)$ le llamaremos par colgante de f.

Queyranne mostró como encontrar un par colgante de f de manera algorítmica usando algo llamado orden de máxima adyacencia.

Rizzi (2000) dio la siguiente interpretación del algoritmo de Queryranne:

Definición 4. Un orden $(v_1, ..., v_n)$ se llama de máxima adyacencia si:

1. v_1 arbitrario.
2. $\forall i \geq 2$ $d(\{v_1, ..., v_{i-1}\}, \{v_i\}) \geq (\{v_1, ..., v_{i-1}\}, \{v_j\}\})$ $\forall j > i$.

Teorema 1. *(Queyranne) Si $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ es orden de máxima adyacencia de f, entonces (v_n, v_{n-1}) es un par colgante de f.*

Para probar este teorema necesitamos el siguiente lema:

Lema 1. *Sea d la bifunción de adyacencia de una función f submodular y simétrica en V. Se tiene que:*

1. $f(X) = d(X, V \setminus X) + \frac{f(\emptyset)}{2}$, $\forall X \subseteq V$.
2. *d es simétrica:* $d(A,B) = d(B,A)$.
3. *d es monótona: A, B, C disjuntos* $\implies d(A,B) \leq d(A, B \cup C)$.
4. *d es consistente: A, B, C disjuntos,* $d(A,B) \leq d(A,C) \implies d(A \cup C, B) \leq d(A \cup B, C)$.

Demostración del Lema 1. . $d(A,B) = \frac{1}{2}[f(A) + f(B) - f(A \cup B)]$.

1. Directo de la simetría y la definición de $d(\cdot)$.
2. Directo.
3. $2[d(A, B \cup C) - d(A,B)]$
$= f(A) + f(B \cup C) - f(A \cup B \cup C) - f(A) - f(B) + f(A \cup B)$
$= f(B \cup C) + f(A \cup B) - f(A \cup B \cup C) - f(B)$
$= f(B \cup C) + f(A \cup B) - f((B \cup C) \cup (A \cup C)) - f((A \cup B) \cap (B \cup C)) \geq 0$. Esto último por la submodularidad de f.

4. $2[d(A,C) - d(A,B)]$
   $= f(A) + f(C) - f(A \cup C) - f(A) - f(B) + f(A \cup B)$.
   $2[d(A \cup B, C) - d(A \cup C, B)]$ (1).
   $= f(A \cup B) + f(C) - f(A \cup B \cup C) - f(A \cup C) - f(B) + f(A \cup B \cup C)$ (2).
   $(1) \geq 0 \implies f(A \cup B) - f(A \cup C) + f(C) - f(B) \geq 0$.
   Aplicando esto a (2) tenemos que $(2) \geq 0$ y por lo tanto se concluye que d es consistente.

$\square$

Demostración del Teorema 1. .
Procedamos por inducción en $n = |V|$.

$n = 2$. Orden: (v_1, v_2). Tenemos que los únicos separadores son los singleton. En particular el mínimo se alcanza en $\{x_2\}$.

$n = 3$. Orden: (v_1, v_2, v_3). Hay que probar que $d(\{v_3\}, \{v_1, v_2\}) \leq d(S, V \setminus S)$, $\forall S$ $v_3 - v_2$ separador.

$\iff d(\{v_3\}, \{v_1, v_2\}) \leq d(\{v_1, v_3\}, \{v_2\})$.

(v_1, v_2, v_3) es de máxima adyacencia, por lo tanto $d(\{v_1\}, \{v_2\} \geq d(\{v_1\}, \{v_3\})$, el resultado sigue de aplicar la propiedad de consistencia.

$n \geq 4$. Veamos que $d(\{v_n\}, \{v_1, ..., v_{n-1}\}) \leq d(S, V \setminus S)$ $\forall S$ $v_{n-1} - v_n$ separador. Supongamos S mínimo $v_{n-1} - v_n$ separador. Distinguimos dos casos:

Caso 1: S NO separa v_1 de v_2, entonces fusionamos v_1 y v_2, esto es crear un nuevo objeto $w = \text{fusión}(v_1, v_2)$ y definimos $f' : 2^{V \setminus \{v_1, v_2\} \cup w} \to \mathbb{R}$.

$$f'(X) = \begin{cases} f(X) : w \in X^c. \\ f(X - w) \cup \{v_1, v_2\} : w \in X. \end{cases}$$

f' es submodular simétrica. Y digamos $d'(A,B) = \frac{1}{2}(f'(A) + f'(B) - f'(A \cup B)) = d(\text{expandir}(A),\text{expandir}(B))$. Luego $(w_{12}, v_3, ..., v_n)$ (donde w_{12} es el nuevo objeto creado de la fusión) es un orden de máxima adyacencia para f_{12} (la función considerando la fusión de los elementos v_1 y v_2), este orden tiene un elemento menos por lo tanto podemos aplicar la hipótesis inductiva y deducir inmediatamente que (v_n, v_{n-1}) es par colgante de f_{12}. Luego se tiene que:

$d_{12}(\{v_n\}, V' - \{v_n\}) \leq d_{12}(X, V' \setminus X)$ $\forall X$ $v_{n-1} - v_n$ separador en f_{12}.

$\implies d(\{v_n\}, V - v_n) \leq d(S, V \setminus S)$.

$\implies (v_n, v_{n-1})$ es par colgante de f.

$\square$