MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°12

14 de Noviembre de 2013

P1) Sea V finito, $f : 2^V \to \{1, \ldots, K\}$ una función submodular simétrica. Diseñe un algoritmo que, en tiempo polinomial en $|V|$ y en $\log K$, encuentre un subconjunto S propio no vacío (o sea $\emptyset \neq S \neq V$) que minimice su densidad definida por $\frac{f(S)}{|S|}$. **Indicación:** Estudie la función $g_t : 2^V \to \mathbb{R}$ dada por $g_t(S) = f(S) - t|S|$.

Definición: Sea K un conjunto cerrado y convexo en $\mathbb{R}^d$ (por ejemplo, un poliedro) que puede ser descrito usando N bits. Un **oráculo de separación** es un algoritmo que, dado $x \in \mathbb{R}^d$ decide si x pertenece a K y si no, devuelve un hiperplano que separa K de x. O sea, si x no pertenece a K, entrega un vector a en $\mathbb{R}$ y un real b tales que $a^T x < b$ y $a^T y \geq b \; \forall y \in K$.
Decimos que el oráculo es **polinomial** si es polinomial en N y en d.
Nota: Si K es un polítopo convexo y x no es factible, existe una desigualdad del polítopo que no es cumplida por x, por lo que nos entrega un hiperplano que separa x de K.

P2) Considere un grafo no dirigido $G = (V, E)$ con una función de costos en los arcos $c : E \to \mathbb{R}$ y k pares de nodos de origen y destino (s_i, t_i). Queremos encontrar un subconjunto de arcos de peso mínimo que conecten s_i con t_i para todo $i = 1, \ldots, k$.

a) Muestre que el problema anterior es equivalente al siguiente problema lineal entero:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum c_e x_e & \\ \text{s.a.} & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & \forall\, (s_i, t_i)\text{-corte}\, \forall\, i = 1, \ldots, k \\ & x_e \in \{0, 1\} & \forall e \in E \end{array}$$

b) Considere ahora la relajación del problema lineal anterior. Usando Edmonds-Karp, encuentre un oráculo de separación para el poliedro del problema lineal relajado y que sea polinomial.

P3) Sea $G = (V, E)$ grafo no dirigido conexo, $w : E \to \mathbb{R}^+$ una función de pesos en los arcos y $T \subseteq V$ un subconjunto de vértices de tamaño par. Buscamos un corte de peso mínimo S que cumpla que $|S \cap T|$ es impar. Es decir, buscamos

$$\text{mín}\{w(\delta(S)) \,|\, S \subseteq V,\, |S \cap T| \text{ impar}\}$$

a) Sea S corte mínimo entre los que tienen al menos un vértice de T a cada lado y tal que $|S \cap T|$ es par. Muestre que entonces existe una solución a nuestro problema contenida en S o en $V \setminus S$.

b) Usando lo anterior, diseñe un algoritmo que resuelva el problema en tiempo polinomial.

P4) **Matchings de peso máximo** Sea $G = (V, E)$ grafo con $2n$ vértices. Edmonds demostró que la envoltura convexa de los matchings perfectos en un grafo está dada por:

$$\begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & \forall v \in V \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & \forall S \subseteq V \text{ tal que } |S| \text{ impar} \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \end{array}$$

Encuentre, usando el problema anterior, un oráculo de separación para el poliedro de matchings perfectos que sea en tiempo polinomial.