MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Álvaro Bustos y Abner Turkieltaub.
Fecha: Lunes 28 de Octubre, 2013.

Cátedra 18

En la clase anterior se estudió el algoritmo genérico de Ford y Fulkerson para hallar un flujo máximo en una red (G, u, s, t)*, la idea base de este algoritmo es la búsqueda iterada de caminos aumentantes en el grafo residual* G^f*. Lamentablemente, en general este algoritmo no termina en tiempo polinomial, por lo que resulta impracticable en la vida real; sin embargo, es conveniente conocer este algoritmo ya que optimizando partes de su implementación (p. ej. el criterio para escoger un camino aumentante) podemos obtener métodos mucho más eficientes para resolver el problema.*

1. Descomposición de flujos

Recordemos que en la clase anterior dedujimos el siguiente resultado de gran importancia:

Teorema 1. *En una red* (G, u, s, t)*, el valor máximo de un flujo es igual a la mínima capacidad de un corte, es decir:*

$$\text{máx}\{\text{valor}(f) : f \textit{ flujo en } (G, u, s, t)\} = \text{mín}\{u(\delta^+(S)) : S\ (s,t)\textit{-corte}\},$$

y, más aún, S *resulta ser el conjunto de nodos* s*-alcanzables en el grafo residual sin aristas nulas* G_0^f*.*

De este resultado se deduce inmediatamente que, bajo ciertas condiciones, el problema entero no es más difícil que el problema sin restricciones. Más explícitamente:

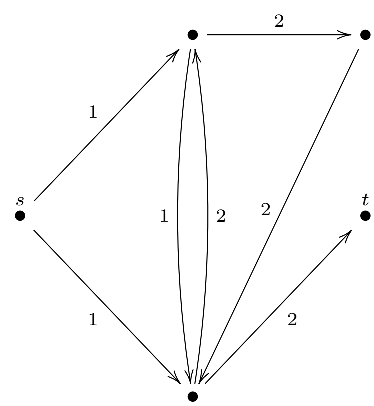
Corolario 1. *Si las capacidades* $u : E \to \mathbb{R}_+$ *son enteras, entonces existe un flujo máximo integral.*

Nos interesa utilizar estos resultados en un teorema que nos permitirá elaborar un algoritmo más eficiente para resolver el problema de flujo máximo.

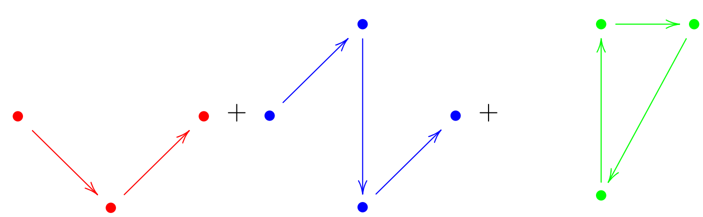
Definición 1. Dado un flujo factible f, su **soporte** es la colección de arcos $e \in E$ para los cuales $f_e > 0$.

Teorema 2. *(Descomposición de flujos) Si* f *es un flujo factible en* (G, u, s, t)*, entonces existe una colección* $\mathcal{P}_f$ *de caminos y una colección* $\mathcal{C}_f$ *de ciclos tal que* f *es la suma de flujos con soporte en* $\mathcal{P}_f$ *y* $\mathcal{C}_f$*. Más aún, podemos escoger esta colección de forma tal que* $|\mathcal{P}_f \cup \mathcal{C}_f| \leq |E|$*.*

Ejemplo 1. Consideremos la siguiente red:



Podemos descomponer un flujo factible de valor 2 (que evidentemente será óptimo) como la unión siguiente:



Demostración. Sea f dicho flujo factible, con valor$(f) > 0$ (i.e. existe flujo de s a t). Como existe flujo positivo, existe un (s,t)-camino P con $f(P) = \min_{e \in P} f_e > 0$.

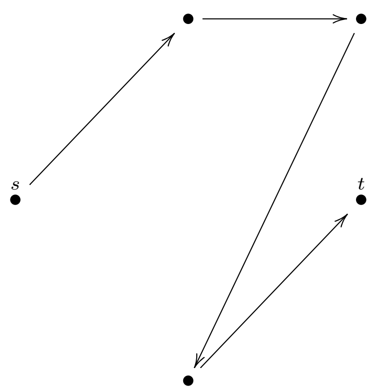
Agreguemos P a la colección $\mathcal{P}_f$, y luego reemplacemos el flujo f por $f^1 := f - \mathbb{1}_P f(P)$. Es claro que f^1 es también un flujo factible, con valor$(f^1) = $ valor$(f) - f(P)$; además, entre las aristas de P existe al menos una, digamos e, para la cual $f_e = f(P)$, de modo que $f^1_e = 0$ y por tanto esta arista sale del soporte de f.

Podemos repetir este proceso de forma iterativa, formando una sucesión de flujos factibles $f^2, f^3, \dots$ de valor estrictamente decreciente, y en cada iteración se agregan caminos $P_2, P_3, \dots$ a la colección $\mathcal{P}_f$; como existe una cantidad finita de arcos, y en cada iteración un arco sale del soporte, eventualmente llegaremos a un flujo factible de valor cero, digamos, $\hat{f}$.

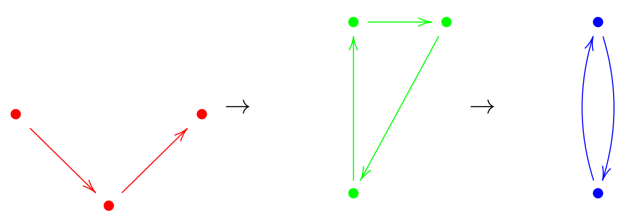
Como valor$(\hat{f}) = 0$, deducimos que hay conservación incluso en s y en t. Si el soporte de $\hat{f}$ contiene algún arco, entonces debe contener un ciclo (por conservación: de cada nodo del que sale un arco debe entrar otro para que el flujo neto en dicho nodo sea cero, y viceversa); así, caminando desde cualquier arco e con $\hat{f}_e > 0$ podemos formar un ciclo, el cual agregamos a $\mathcal{C}_f$ de forma análoga a como hicimos con los caminos, reemplazando $\hat{f}$ por $\hat{f}^1 := \hat{f} - \mathbb{1}_C \hat{f}(C)$.

Podemos iterar obteniendo una sucesión de flujos nulos $\hat{f}^2, \hat{f}^3, \dots$, eliminándose una arista en cada iteración. Eventualmente no podremos repetir este proceso, lo que significa que el soporte de $\hat{f}^k$ debe ser vacío. Deducimos que el soporte de f era unión de los caminos de $\mathcal{P}_f$ y los ciclos de $\mathcal{C}_f$; más aún, como cada vez que añadíamos un camino o ciclo eliminábamos una arista de E, deducimos que entre los c aminos y ciclos de $\mathcal{C}_f \cup \mathcal{P}_f$ no puede haber más de $|E|$ elementos. ■

Ejemplo 2. Para el grafo del ejemplo anterior, si consideramos el camino P dado por:



veremos que $f(P) = 1$ y al agregar P a $\mathcal{P}_f$ obtenemos una sucesión de flujos factibles que producen los siguientes caminos y ciclos:



Corolario 2. *De este teorema se deduce la identidad:*

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}_f} \mathbb{1}_P f(P) + \sum_{C \in \mathcal{C}_f} \mathbb{1}_C f(C).$$

La identidad anterior puede interpretarse como sigue:

Corolario 3. *Todo flujo factible f es combinación cónica de indicatrices de (s,t)-caminos y ciclos, y podemos hallar esta combinación en tiempo polinomial.*

La potencia de este resultado radica en el hecho de que nos permite establecer restricciones fuertes en qué flujos factibles son óptimos. Notemos lo siguiente:

Observación 1. Si f^* es un flujo máximo (con $v^* := \text{valor}(f^*)$), la descomposición anterior nos indica que:

$$f^* = \sum_{P \in \mathcal{P}_{f^*}} \lambda_P \mathbb{1}_P + \sum_{C \in \mathcal{C}_{f^*}} \lambda_C \mathbb{1}_C,$$

con escalares positivos, y, como solamente los caminos aportan al valor del flujo, deducimos que:

$$v^* = \sum_{P \in \mathcal{P}_{f^*}} \lambda_P.$$

Como $|\mathcal{P}_{f^*}| \leq |E|$, deducimos que existe un camino $P \in \mathcal{P}_{f^*}$ para el cual $\lambda_P \geq v^*/|E|$, y por lo tanto todos los arcos de P deben tener capacidad $u_e \geq v^*/|E|$.

Supongamos que queremos encontrar f^*. El argumento anterior nos dice que existe un (s,t)-camino en G_0^0 (i.e. el grafo residual de un flujo nulo) con capacidad residual al menos $v^*/|E|$. Este resultado es muy sugerente, ya que nos ofrece un criterio para escoger un camino aumentante.

Notemos que, si aumentamos el flujo nulo con el que comenzamos con este camino, obtendremos un flujo f^1 con valor mayor o igual a $v^*/|E|$. Estudiemos el grafo residual resultante (G^{f^1}, u^{f^1}, s, t), que también es una red.

Si f^{**} es el flujo máximo en esta red, tendremos que $\text{valor}(f^{**}) = \text{valor}(f^*) - \text{valor}(f^1)$ (nótese que $f^* - f^1$ podría no satisfacer las necesidades, así que f^{**} no necesariamente coincide con el flujo $f^* - f^1$ ya que éste podría no ser factible).

Sin embargo, $f^{**} + f^1$ **es** un flujo factible en (G, u, s, t). Verificar la propiedad de conservación es inmediato, y la factibilidad se deriva de la definición de u^{f^1}. De este modo $\text{valor}(f^{**}+f^1) \leq \text{valor}(f^*)$.Además, por lo anterior $\text{valor}(f^{**}) \geq \text{valor}(f^*) - \text{valor}(f^1)$. Así, $f^{**} + f^1$ es un flujo óptimo que puede o no coincidir con f^*.

Así, sabemos que, por descomposición de flujos, puede obtenerse un flujo $\tilde{f}$ óptimo (i.e. de igual valor que f^*) en (G, u, s, t) de modo tal que $\tilde{f} - f^1$ es factible en (G^{f^1}, u^{f^1}, s, t).

A partir de lo anterior, vemos que, usando el mismo argumento de descomposición, debe tenerse que:

$$\text{valor}(f^{**}) \leq v^* \left(1 - \frac{1}{|E|}\right),$$

y deducimos que existe un (s,t)-camino P en (G^{f^1}, u^{f^1}, s, t) con capacidad mayor o igual a $\dfrac{v^*}{|E|}\left(1 - \dfrac{1}{|E|}\right)$.

Podemos usar este camino para aumentar y obtener un f^2 en (G, u, s, t) para el cual:

$$\text{valor}(f^2) \geq \text{valor}(f^1) + \frac{v^*}{|E|}\left(1 - \frac{1}{|E|}\right),$$

de lo cual deducimos que:

$$\text{valor}(f^*) - \text{valor}(f^2) \leq v^* \left(1 - \frac{1}{|E|} + \frac{1}{|E|} - \frac{1}{|E|^2}\right),$$

o bien:

$$\text{valor}(f^*) - \text{valor}(f^2) \leq v^* \left(1 - \frac{1}{|E|}\right)^2.$$

Iterando lo anterior, un argumento similar nos permite concluir que el flujo f^k obtenido tras k iteraciones satisface:

$$\text{valor}(f^*) - \text{valor}(f^k) \leq v^* \left(1 - \frac{1}{|E|}\right)^k.$$

Supongamos ahora que las capacidades son enteras. Previamente vimos que en este caso v^* es entero. De la última desigualdad deducimos que:

$$\text{valor}(f^*) - \text{valor}(f^k) \leq v^* \left(1 - \frac{1}{|E|}\right)^k < 1,$$

para un valor de k suficientemente grande (veremos que vale para $k = \Theta(|E| \ln(v^*))$); es decir, este procedimiento nos asegura que el algoritmo termina, propiedad que no estaba garantizada por el algoritmo de Ford y Fulkerson.

Nos interesa determinar el valor de k para el cual se tiene lo anterior, lo que nos permitirá estimar el número de iteraciones requeridas en el peor caso. Veamos que el k propuesto satisface $\left(1-\frac{1}{|E|}\right)^k < \frac{1}{v^*}$:

$$\left(1-\frac{1}{|E|}\right)^{c|E|\ln(v^*)} = \Theta\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{c\ln(v^*)}\right) = \Theta\left(e^{-c\ln(v^*)}\right) = \Theta\left(\left(\frac{1}{v^*}\right)^{-c}\right) < \frac{1}{v^*},$$

donde la primera igualdad se obtiene del hecho de que $\left(1-\frac{1}{x}\right)^x \to e^{-1}$.

Esta es la primera forma del **Algoritmo de Edmond-Karp**. Es un algoritmo débilmente polinomial, pues es polinomial en la magnitud de los datos involucrados y no en la cantidad de datos; sin embargo, para valores pequeños de u (y por tanto de v^*), este algoritmo resulta ser una mejora significativa sobre el algoritmo de Ford y Fulkerson. Una implementación del algoritmo sería como sigue:

2. Algoritmo de Edmond-Karp 1

Algorithm 1 Algoritmo de Ford-Fulkerson.

Dado (G, u, s, t) una red.
$f \leftarrow 0$, u integral.
Construir (G^f, u^f, s, t) la red residual.
while Existe un camino aumentante en (G^f, u^f, s, t) **do**
    Aumentar f en el camino de mayor capacidad.
end while
Devolver f.

Teorema 3. *El algoritmo anterior termina después de $O(|E|\ln(v^*))$ iteraciones y devuelve un flujo míaximo.*

Por lo tanto, el número de iteraciones es polinomial, además, cada iteración se puede implementar con una pequeña modificación de Dijkstra, luego, cada iteración toma $O(\text{Dijkstra}) = O(m + n\ln n)$.