MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Gianmarco Sperone y Roberto Bobadilla.
Fecha: Jueves 10 de Octubre de 2013.

Cátedra 14

1. Problema de asignación.

Consideremos A y B conjuntos disjuntos, con $|A| = |B| = n$, y una matriz $C_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, con $i \in A$ y $j \in B$. Queremos encontrar un matching perfecto M y de costo mínimo en $G = (A\dot{\cup}B, E)$, donde G es un grafo bipartito completo, es decir, están presentes todas las aristas que van desde A hasta B.
Recordemos primero un par de definiciones. Diremos que un matching en E es un conjunto de pares disjuntos de elementos de E, y diremos que el matching es perfecto cuando este cubre todos los vértices, es decir, para cualquier vértice del grafo existe alguna arista del grafo adyacente a éste.

Modelemos este problema como un programa entero, es decir, como una colección de desigualdades que satisfacen ciertas variables restringidas a valores enteros:

$$\forall i, j \in E, X_{ij} = 1_{ij \in M}.$$
$$\sum_{j \in B} X_{ij} = 1, \forall i \in A.$$
$$\sum_{i \in A} X_{ij} = 1, \forall j \in B.$$

Las últimas dos condiciones son necesarias para tener un matching perfecto pues se traducen en que cada vértice de A es adyacente a una única arista del matching M y lo mismo para cada vértice en B.

(P entero).

$$IP : \text{mín} \sum_{ij \in E} C_{ij} X_{ij}.$$

Sujeto a

$$\sum_{j \in B} X_{ij} = 1, \forall i \in A.$$
$$\sum_{i \in a} X_{ij} = 1, \forall j \in B.$$
$$X_{ij} \in \{0, 1\} \;\; (*).$$

Notemos que si relajamos $(*)$ obtenemos un programa lineal:

$$(PL) : \text{mín} \sum_{ij \in E} C_{ij} X_{ij}.$$

Sujeto a

$$\sum_{j \in B} X_{ij} = 1, \forall i \in A.$$
$$\sum_{i \in a} X_{ij} = 1, \forall j \in B.$$
$$X_{ij} \geq 0.$$

(No es necesario pedir $X_{ij} \leq 1$ pues las restricciones de arriba garantizan eso).

Ahora bien, SIMPLEX no es un algoritmo polinomial, por lo tanto lo que haremos será apoyarnos en la teoría de dualidad para constuir un algoritmo apropiado para este problema.
Consideremos $P \subset \mathbb{R}^E$ el conjunto descrito por las desigualdades, P es entonces un poliedro acotado (mejor dicho un polítopo). Recordemos que x es punto extremo del poliedro P si y solo si x no se puede escribir como combinación convexa de 2 puntos distintos de P: $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \implies x_1 = x_2$.
Otro teorema que sabemos es el siguiente:
Para todo punto extremo x^* de P existe $c \in \mathbb{R}^E$ tal que x^* es el único mínimo de $\min\limits_{x \in P} c^t x$.

Luego si optimizamos una función lineal sobre P su mínimo se alcanza sobre un punto extremo del poliedro.

El objetivo de esta clase es probar el siguiente teorema:

Teorema 1. *El polítopo P definido en (PL) tiene todos sus puntos extremos en $\{0,1\}^E$.*

Observación: Llamemos z_{IP} al valor del programa entero y z_{PL} al valor de la relajación. Sabemos que $z_{PL} \leq z_{IP}$ debido a que (PL) es una relajación de (IP), ahora si el teorema de integralidad fuera cierto entonces tendrÃŋamos que $z_{PL} = z_{IP}$. Esto es bueno pues queremos usar resultados de dualidad de (PL).

La demostración del teorema será algorítmica:
$\sum\limits_{j \in B} X_{ij} = 1$ Asociaremos esta restricción a variables $u_i \in \mathbb{R}$.
$\sum\limits_{i \in A} X_{ij} = 1$ Y a esta asociaremos variables $v_j \in \mathbb{R}$.
Supongamos que para todo $i \in A$ y $j \in B$ existen $u_i \in \mathbb{R}$ y $v_j \in \mathbb{R}$ tales que $u_i + v_j \leq C_{ij}$. Luego, para todo $x \in P$ se tendrá que:

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} C_{ij} X_{ij} &\geq \sum_{ij} (u_i + v_j) X_{ij} && (1)\\
&= \sum_{ij} u_i X_{ij} + \sum_{ij} v_j X_{ij} && (2)\\
&= \sum_{i} u_i \sum_{j} X_{ij} + \sum_{j} v_j \sum_{i} X_{ij} && (3)\\
&= \sum_{i} u_i + \sum_{j} v_j, && (4)
\end{aligned}$$

en donde hemos usado las reestricciones del problema para llegar a la última igualdad. Con todo esto, concluimos que:

$$\begin{aligned}
&\max_{s.a.} \sum_i u_i + \sum_j v_j \leq \min_{x \in P} \sum_{ij} C_{ij} X_{ij}. && (5)\\
&u_i + v_j \leq C_{ij} && (6)
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x^* \in P$ es mínimo para el programa lineal y $(u^*, v^*) \in D$ es máximo para su dual. Luego, por holgura complementaria se tiene que $C_{ij} = u_i^* + v_j^*$, para todo par $i \in A, j \in B$ tales que $x_{ij}^* > 0$.
La idea será entonces la siguiente:

1. Consideremos la solución dual factible inicial (u, v), con $u \equiv 0$ y $v_j = \min\limits_{i \in A} C_{ij}$.

2. Supongamos que (u, v) es la solución dual factible actual y definamos $w_{ij} := C_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, para todo par $i \in A, j \in B$. Si existe un matching M cuyo valor es igual al valor de (u, v), entonces $ij \in M$ implica que $X_{ij} = 1$, y esto a

su vez implica (debido a la holgura complementaria) que $w_{ij} = 0$. Se tendrá entonces que $M \subset F_0 := \{ij \in E : w_{ij} = 0\}$. Teniendo en cuenta esto, una estrategia razonable consiste en encontrar un matching perfecto cualquiera M^* cuyas aristas pertenezcan a F_0. Notemos que, de existir tal matching perfecto M^*, entonces se debe tener que:

$$valor(M^*) = \sum_{ij \in M} C_{ij} = \sum_{i \in A} u_i + \sum_{j \in B} v_j.$$

En otras palabras, cualquier matching perfecto cuyas aristas pertenezcan a F_0 es solución óptima del problema original. Conocemos un algoritmo que nos permite encontrar un matching de cardinalidad máxima (el que usa caminos aumentantes) en grafos bipartitos. Denotemos por M' al matching encontrado de esta forma. Si el matching M es perfecto, entonces debe ser de costo mínimo para la matriz de costos C. En caso contrario, podemos construir un digrafo auxiliar (agregando un nodo extra s), a partir del grafo original G y del matching M, tal cual se hizo en la demostración del teorema de Kőnig. De hecho, si denotamos por L al conjunto de nodos de G que son alcanzables desde s, teníamos que:

$$|M| = |(A \setminus L) \dot\cup (L \cap B)|.$$

Usaremos esto para mejorar la solución del problema dual. Sea $\delta = \min\limits_{i \in A \cap L, j \in B \setminus L} w_{ij}$. Definamos también, para $i \in A$ y $j \in B$:

$$u'_i = \begin{cases} u_i & , i \in A \setminus L \\ u_i + \delta & , i \in A \cap L \end{cases} \quad , \quad v'_j = \begin{cases} v_j & , j \in B \setminus L \\ v_j - \delta & , j \in B \cap L \end{cases}$$

Probemos que el par (u', v') es dual factible. En efecto, analicemos caso a caso:

- Si $i \in A \setminus L$ y $j \in B \setminus L$, entonces $u'_i + v'_j = u_i + v_j$.
- Si $i \in A \cap L$ y $j \in B \setminus L$, entonces $u'_i + v'_j = u_i + v_j + \delta \leq C_{ij}$.
- Si $i \in A$ y $j \in B \cap L$, entonces $u'_i + v'_j \leq u_i + v_j$.

Además se tiene que:

$$\sum_{i \in A} u'_i + \sum_{j \in B} v'_j = \sum_{i \in A} u_i + \sum_{j \in B} v_j + \delta(|A \cap L| - |B \cap L|),$$

en donde $|A \cap L| - |B \cap L| = |A \cap L| + |A \setminus L| - |A \setminus L| - |B \cap L| = |A| - (|A \setminus L| + |B \cap L|) = |A| - |M| > 0$.
En conclusión, hemos probado que (u', v') es mejor solución que la anterior.

Observación: en cada iteración, el conjunto F_0 cambia (no necesariamente crece), pues en cada iteración ingresa la arista que minimiza la cantidad δ. Veremos en la próxima clase que, en cada iteración, el conjunto $B \cap L$ crece, y esto puede ocurrir a lo más n veces, pues de no ser así, $|M|$ aumentaría. En conclusión, en $O(n^2)$ iteraciones, el cardinal de M es máximo, y así, se tiene un tiempo de ejecución polinomial.