MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Emilio Molina y Sebastián Pérez.
Fecha: 7 de Octubre de 2013.

Cátedra 13

1. Teorema de Hall

Sea $G = (V, E)$ un grafo general (no necesariamente bipartito). De la clase anterior teniamos los siguientes resultados

Teorema 1. *M es un matching de tamaño máximo ssi $\nexists$ P camino M-aumentante.*

Este teorema usaba el hecho que si P es un camino M-aumentante, entonces $M\Delta P$ es un matching y $|M\Delta P| = |M|+1$.

De ahora en adelante a un grafo bipartito lo denotaremos $G = (A \cup B, E)$ donde $E \subseteq \{e = ab, a \in A, b \in B\}$. En algunos textos a los conjuntos de vértices A y B se les conoce como la bipartición de G.

Definición 1. $G = (V, E)$ un grafo general. Un conjunto de vertices $U \subseteq V$ se dice *cubrimiento (vertex cover)* si $\forall e \in E$ $\exists w \in U$ tal que w es incidente a e .

Teorema 2 (König). *Si $G = (A \cup B, E)$ bipartito, entonces:*

$$\max\{|M| : M \textit{ matching } \} = \min\{|C| : C \textit{ cubrimiento } \}.$$

Comentarios :

- Es posible encontrar un matching de cardinal máximo en un grafo bipartito en $\mathrm{O}(m\sqrt{n})$ mediante el algoritmo de *Hopcroft - Karp.*

- Supongamos que tenemos $G = (A \cup B, E)$ grafo bipartito y un matching M de este, entonces ¿Cómo demostrar que M **no es** máximo?. Como respuesta basta encontrar otro matching más grande que M, ahora bien, si se encuentra un camino M-aumentado, entonces por el teorema 1, se puede concluir que M no es máximo.

- ¿Y si ahora quisieramos demostrar que M **es** máximo?. Para responder esta interrogante se utiliza el teorema de König intentando encontrar un cubrimiento U tal que $|U| = |M|$, pues recordemos que $\forall C$ cubrimiento se tiene que $|M| \leq |C|$. Además la clase pasada vimos que el conjunto definido como

$$C \doteq (L \setminus A) \cup (L \cap B)\,,$$

  es un cubrimiento mínimo, con L el conjunto de vértices alcanzables desde s (el vértice auxiliar).

A continuación se verá un teorema similar. Supongamos que $G = (A\cup B, E)$ bipartito y se quiere encontrar M matching que cubra A. Si existe tal matching M, entonces $\forall X \subseteq A$ se cumple que $|N(X)| \geq |X|$, pues M induce una inyección de X en $N(X)$.

Teorema 3 (de Hall). *Sea $G = (A \cup B, E)$ grafo bipartito, entonces $\exists M$ matching que cubre A ssi $\forall X \subseteq A$ se cumple que $|N(X)| \geq |X|$.*

Se demostrará el teorema usando submodularidad. Para $X \subseteq A$ se define $\Gamma(X) \doteq |N(X)| = \sum_{b\in B} g_b(X)$, en donde, $g_b(X) = 1$ si $b \in N(X)$, 0 si no.

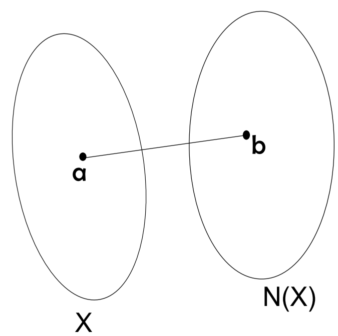
Probemos que Γ es submodular probando que g_b lo es, es decir, $g_b(X \cup Y) + g_b(X \cap Y) \leq g_b(X) + g_b(Y)$. Se tienen los siguientes 3 casos

$$\begin{aligned} g_b(X \cap Y) = 1 &\Longrightarrow \text{todos los términos son 1, por lo cual se cumple,}\\ g_b(X \cup Y) = 0 &\Longrightarrow \text{todos los términos son 0, por lo tanto también se cumple.}\\ g_b(X \cap Y) = 0 \text{ y } g_b(X \cup Y) = 1 &\Longrightarrow b \text{ es vecino de algún elemento de } X \text{ o } Y\text{, luego la desigualdad se cumple.} \end{aligned}$$

Demostración del teorema.

($\Rightarrow$) Ya se probó.

($\Leftarrow$) Supongamos que el resultado no es cierto. Digamos que G es de *Hall* si $\forall X \subseteq A$ se cumple $|N(X)| \geq |X|$. Supongamos que G es un mínimo contraejemplo, entonces G es de Hall, el teorema es falso para G pero es cierto para todos sus subgrafos. Para todo $e \in E$ se tiene que $G - e$ no puede ser de Hall, pues si lo fuera $\exists M \subseteq E - e$ cubriendo A. (*)



Luego $\exists X$ tal que $|N_{E-e}(X)| < |X|$, notamos que el único vecino que se perdió es b, entonces como b tiene a a como único vecino en X $|N_E(X)| = |X|$.

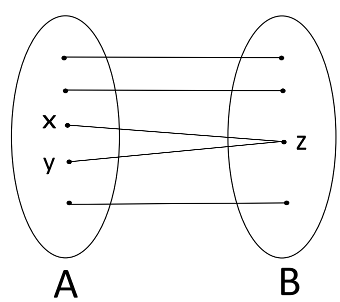
Llamemos *ajustado* a todo $X \subseteq A$ tal que $\Gamma(X) = |X|$. La condición (*) dice que $\forall ab = e \in E$, $\exists X_{ab}$ tal que a es el único vecino de b en X.

Como Γ es submodular, entonces para X, Y ajustados se tiene que

$$\Gamma(X \cup Y) + \Gamma(X \cap Y) \leq \Gamma(X) + \Gamma(Y) = |X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| \leq \Gamma(X \cup Y) + \Gamma(X \cap Y)$$

en donde se usó que $|\cdot|$ es submodular, de lo anterior se deduce que $X \cup Y$ y $X \cap Y$ son ajustados.

Volviendo al grafo G, se tiene que $\Sigma(\{x\}) \geq 1$ por hipótesis. Supongamos que $\forall x \in A$ se tiene que $\Gamma(\{x\}) = 1$. Entonces la situación es como en la siguiente figura.

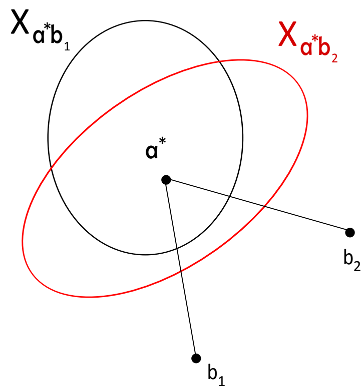


Si $\exists z \in B$ tal que tiene más de un vecino en A, digamos $x, y \in A$, entonces como hemos supuesto que los singleton de A son ajustados, se tendrá que su unión también lo será por lo probado anteriormente, por lo tanto

$$2 = |\{x, y\}| > 1 = |z| = |N(\{x, y\})| = |\{x, y\}|, \qquad \text{lo cual es una contradicción.}$$

Si $\forall z \in B$, z tiene a lo más un vecino en A, entonces E sería un matching que cubre a A, lo cual contradice la condición de que G es mínimo contraejemplo.

Así $\exists a^* \in A$ con $\Gamma(\{a^*\}) \geq 2$. Consideremos $X_{a^*b_1}, X_{a^*b_2}$.



Sea $X^* = X_{a^*b_1} \cap X_{a^*b_2}$, $a^* \in X^*$. Entonces X^* es ajustado y a^* es el único vecino de b_1 de b_2 en X^*. Luego

$$\begin{aligned} |X^* - a^*| &\leq \Gamma(X^* - a^*) = |N(X^* - a^*)| \\ &\leq |N(X^*) - \{b_1, b_2\}| = \Gamma(X^*) - 2 \\ &= |X^*| - 2 = |X^* - a^*| - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X^* - a^*$ contradice que G es de Hall.

□

Ejercicio :

G grafo se dice k-regular si $d(v) = k$, $\forall v \in V$. Demuestre que si $G = (A \cup B, E)$ grafo bipartito y k-regular, entonces existe un matching perfecto en G.

2. Matching con pesos en grafos bipartitos

Dado $G = (A \cup B, E)$ grafo bipartito, tenemos los siguientes problemas

1. Sea $\omega : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de pesos no necesariamente no negativa, el problema consiste en encontrar un matching M de peso máximo.
2. Sean $\omega : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, el problema consiste en encontrar un matching de tamaño k (k aristas) de peso máximo.
3. **(Problema de asignación)** Supongamos que $|A| = |B|$. Sea $c : A \times B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el problema consiste en encontrar una asignación $a \mapsto f(a) \in B$ inyectiva de costo $\sum_{a \in A} c(a, f(a))$ mínimo.

Si G es bipartito completo, entonces E se identifica con $A \times B$ y el problema de asignación se convierte en encontrar un M matching de G de costo $\sum_{e \in M} c(e)$ mínimo.

Vemos que (3) $\Rightarrow$ (1), en efecto, basta colocar vértices fantasmas para que $|A| = |B|$, poner las aristas que no existen con costo $+\infty$ y tomar $\omega = -c$.

También (3) $\Rightarrow$ (2), dadas las biparticiones A y B con tamaño mayor o igual a k, en A agregamos $|B| - k$ vértices y los unimos con $|B| - k$ vértices de B, de manera análoga en B agregamos $|A| - k$ vértices y los unimos con $|A| - k$ vértices de A. Obtenemos un grafo que tiene sus biparticiones de igual tamaño, solo nos resta aplicar pesos adecuados y aplicar (3).