MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°9

18 de octubre de 2013

Recuerdo: Sea $G = (V, E)$ grafo simple. Dado $u \in V$, denotamos por $\Gamma(u)$ el conjunto de aristas incidentes a u en G. Definimos los siguientes poliedros en $\mathbf{R}^E$

$$\begin{aligned} M(G) &= \operatorname{conv}(\{\chi_M : M \text{ emparejamiento}\}) \\ M_F(G) &= \left\{x \in \mathbf{R}^E \ : \ x \geq 0, \quad \textstyle\sum_{e\in\Gamma(v)} x_e \leq 1 \quad \forall\, v \in V(G)\right\} \\ P(G) &= \operatorname{conv}(\{\chi_M : M \text{ emparejamiento perfecto}\}) \\ P_F(G) &= \left\{x \in \mathbf{R}^E \ : \ x \geq 0, \quad \textstyle\sum_{e\in\Gamma(v)} x_e = 1 \quad \forall\, v \in V(G)\right\} \end{aligned}$$

que llamamos el *polítopo de emparejamientos*, el *polítopo de emparejamientos fraccionales*, el *polítopo de emparejamientos perfectos* y el *polítopo de emparejamientos perfectos fraccionales*, respectivamente.
Recuerde el Teorema de Birkhoff-von Neumann: Si G es bipartito, $P(G) = P_F(G)$. Además, el Problema Controlable N°15 afirma que si G es bipartito, $M(G) = M_F(G)$.

P1. **(a)** Sea G grafo, no necesariamente bipartito. Demuestre que $M(G) \subseteq M_F(G)$ y $P(G) \subseteq P_F(G)$.

(b) Muestre que si G no es bipartito, entonces $M(G) \neq M_F(G)$.

(c) Muestre que la recíproca del Teorema de Birkhoff-von Neumann es falsa. Es decir, encuentre un grafo $G = (V, E)$ tal que $P(G) = P_F(G)$ pero que G no sea bipartito.

P2. Una matriz M, cuadrada de tamaño $n \times n$, se dice *matriz de permutación* si M corresponde a una permutación de las columnas de la matriz identidad. O sea, existe $\sigma : [n] \to [n]$ permutación tal que $M = [I_{\bullet\sigma(1)}|I_{\bullet\sigma(2)}|\cdots|I_{\bullet\sigma(n)}]$. Una *matriz doblemente estocástica* es una con coeficientes en $[0, 1]$ tal que para todo i, j se tiene que $\sum_k a_{ik} = \sum_\ell a_{\ell j} = 1$. Muestre que toda matriz doblemente estocástica es combinación convexa de matrices de permutación.

P3. Sea $G = (A \cup B, E)$ bipartito y $w : E \to \mathbf{R}$ una función de pesos en sus arcos. Considere $x \in P_F(G)$ un emparejamiento perfecto fraccional de costo $W = \sum_{e\in E} w_e x_e$.

(a) Muestre que existe un emparejamiento perfecto de costo mayor o igual a W, y uno de costo menor o igual a W.

(b) A partir de lo anterior, diseñe un algoritmo que, dado x emparejamiento perfecto fraccional, encuentre un emparejamiento perfecto entero de costo mayor o igual (o menor o igual). Si k es el número de coordenadas de x distintas de 0 y de 1, su algoritmo debiera funcionar en tiempo $O(kn)$.