MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Francisco Arana y Felipe Muñoz
Fecha: 4 de Octubre de 2013.

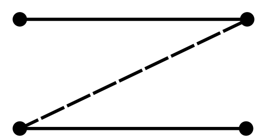
Cátedra 12

Comenzaremos recordando la definición de matching en un grafo no dirigido:

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Se dice que $M \subseteq E$ es un matching en G si $\nexists\ e, f \in M$ con $e \neq f$, tal que son incidentes en un mismo $v \in V$.

Observación. *El algoritmo glotón no funciona para encontrar un matching de cardinalidad máxima.*

Ejemplo. Para visualizar lo anterior podemos considerar el grafo de la figura. Al partir con nuestro algoritmo glotón podemos seleccionar la arista segmentada y es claro que ya no podremos agregar otra para formar un matching de mayor cardinalidad, siendo que existe uno.



Definición. $v \in V$ se dice M-cubierto si $\exists e \in M$ tal que e es incidente en v. En caso contrario v se dice M-expuesto.

Definición. Dado M un matching, diremos que M es perfecto si $\forall v \in V$, v está M-cubierto.

Definición. Dado un camino simple $P = e_1 e_2 \ldots e_l$, donde $e_i \in E$, diremos que P es M-alternante en G si:

$$e_i \in M \Leftrightarrow e_{i+1} \notin M.$$

Observación. *Se define un ciclo alternante de forma análoga.*

Definición. Se dice que un camino P M-alternante es M-aumentante si los nodos extremos de P están M-expuestos.

Observación. *Si P es M-aumentante, entonces:* $|P \setminus M| = |P \cap M| + 1$.

Ahora nuestro problema a resolver será el de encontrar un matching de cardinal máximo, para esto nos será útil el siguiente teorema:

Teorema 1. *M es maching de cardinal máximo $\Leftrightarrow \nexists$ un camino M-aumentante.*

Antes de probar el teorema estudiemos un lema que nos ayudará en la demostración de este:

Lema 1. *Dado M matching. Si P es M-aumentante $\Rightarrow M' = M \Delta P$ es un matching tal que $|M'| = |M| + 1$.*

Demostración. Tenemos que $|M'| = |M| + 1$, pues $|P \setminus M| = |P \cap M| + 1$. Además M' es matching, ya que si no lo fuera, tomando $e, f \in M'$, $e = f$ y ambos incidentes en v, tenemos que sin pérdida de generalidad $e \in M \setminus P \wedge f \in P \setminus M$. Por lo tanto, como P es M-aumentante, $\exists g \in M$ incidente en v, con $g \neq e$, lo cual es una contradicción con que M sea matching. Por lo tanto M' es matching. $\square$

Ahora probemos el teorema que enunciamos anteriormente:

Demostración.

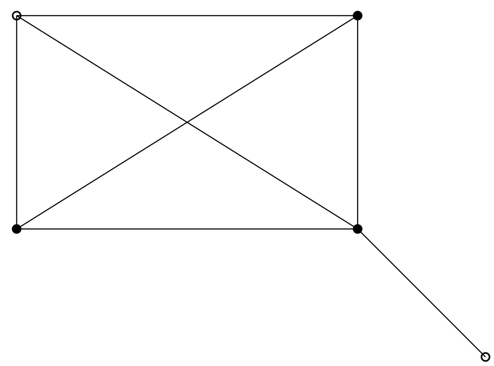
- $\Rightarrow$ Directo del lema pues si existiese un camino M-aumentante, en virtud de lo probado, M' es un matching de cardinal mayor estricto que M.

- $\Leftarrow$ Por contradicción supongamos que M' es matching tal que $|M'| > |M|$. Entonces dado $N = M' \Delta M$ tendremos que en cada nodo de G inciden a lo más dos arcos de N, de esta forma nos damos cuenta de que N es una colección de caminos o ciclos que alternan sus arcos entre M y M'. Finalmente tendremos que como $|M'| > |M|$, entonces $\exists$ un camino P en $M' \Delta M$ tal que $|M' \cap P| > |M \cap P| \Rightarrow P$ es M-aumentante, llegando así a una contradicción.

□

Definición. Recubrimiento de Nodos, Vertex Cover. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de vértices $C \subseteq V$ se dice recubrimiento de G si para toda arista $e \in E$, e es incidente en algún vértice $v \in C$.

Intuitivamente, dado un grafo $G = (V, E)$ podemos interpretar el grafo como una cárcel, donde las aristas representan los pasillos y los vértices los puntos desde donde los guardias pueden vigilar. En este sentido, un cubriemiento corresponde a un posible asignación de puestos de vigilancia de modo que todos los pasillos pueden ser vigilados. Podemos observar esto en el siguiente ejemplo gráfico donde los vértices en negro corresponde a aquellos considerados en el cubrimiento correspondiente.

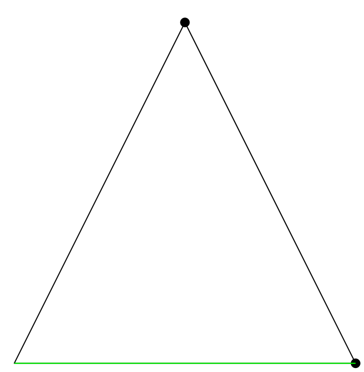


Proposición 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si M es un matching en G y C es un recubrimiento de G, entonces*

$$|M| \leq |C|$$

Demostración. Consideremos un matching M y un cubrimiento C cualquiera asociados a G. Para cubrir G debemos cubrir al menos las aristas de M. Para cubrir las aristas de M debemos considerar al menos uno de los vértices asociado a cada una de las aristas del matching. Como M es matching, estos vértices son todos distintos, pues en caso contrario existirían dos aristas del matching incidiendo sobre un mismo vértice, lo que contradice la definición. Sigue luego que $|M| \leq |C|$. □

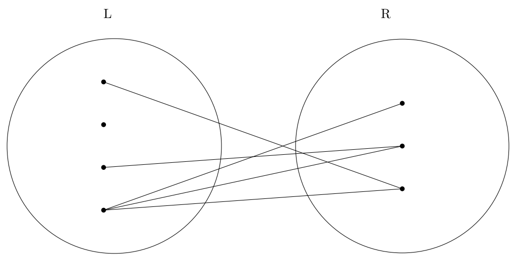
Observación. *La desigualdad anterior no es en general igualdad. Basta considerar el siguiente contraejemplo donde las aristas en verde corresponden a las aristas del matching considerado y lo nodos en negro corresponden a los vértices del cubrimiento considerado.*



Definición. Grafo Bipartito. Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito si existen conjuntos disjuntos $L, R \subseteq V$ tales que $V = L \cup R$ y tal que todo vertice $e \in E$ es de la forma $e = uv$ con $u \in L, v \in R$ o de la forma $e = vu$ con $v \in L, u \in R$.

Lo anterior corresponde a un ejemplo gráfico de un grafo bipartito.

Consideremos la siguiente caracterización útil de grafos bipartitos.



Proposición 2. *Un grafo G es bipartito ssi no tiene ciclos de largo impar.*

Demostración. Se verá en clase auxiliar. □

El objetivo de lo que sigue es probar el siguiente teorema.

Teorema 2. *König, 1931. Sea $G = (V, E)$ un grafo es bipartito, entonces*

$$\max_{M \text{ matching}} |M| = \min_{C \text{ recubrimiento}} |C|$$

Para demostrar este teorema debemos desarrollar un poco más la teoría. En lo que sigue consideraremos $G = (V, E)$ un grafo bipartito. Construyamos primero un algoritmo que nos permita encontrar un matching de cardinal máximo en G.

Algorithm 1 Algoritmo de Matching de Cardinal Máximo

Require: $G = (V, E)$ grafo bipartito.
  $M \leftarrow \emptyset$.
  while existe P camino M-aumentante **do**
    $M \leftarrow M \Delta P$
  end while
  return M.

El algoritmo anterior no está listo todavía pues falta describir un procedimiento válido para entontrar caminos M-aumentantes. Describiremos este un procedimiento para lo anterior en lo que sigue.

Consideremos un grafo $G = (V, E)$ bipartito y M matching. Para encontrar un camino M-aumentante construiremos un digrafo auxiliar $D = D(M, G)$ de la siguiente forma

1. $V(D) = V(G) \cup \{s\}$
2. Una arista $e = uv \in E(D)$ si se cumple alguna de las siguientes:
   a) $u = s, v \in L$ es M-expuesto
   b) $u \in L, v \in R, uv \notin M$
   c) $u \in R, v \in L, uv \in M$

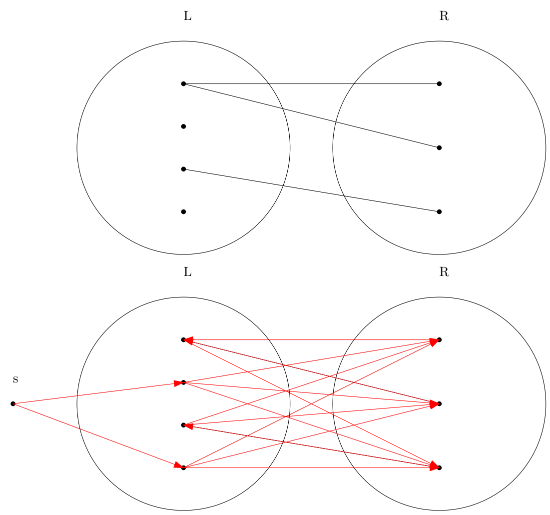
Un ejemplo gráfico de lo anterior se expone en la próxima página.

Considerando la construcción anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3. *Son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *Existe P un camino M-aumentante en G*
2. *Existe P' un sv-dicamino en $D(M, G)$, con $v \in R$.*

Demostración. Es directo de la construcción del grafo $D(M, G)$. □



Dado lo anterior observamos que el problema de encontrar caminos M-aumentantes se puede resolver en tiempo lineal $O(|V| + |E|)$, simplemente por aplicación de BFS o DFS sobre el digrafo $D(M, G)$ construido.

Sigue luego que la complejidad total del algoritmo para encontrar matching de cardinal máximo es $O(|V||E|)$. Donde el término $|V|$ emana del hecho que el ciclo while requiere iterar a lo más $O(|V|)$ veces. Esto pues los caminos M-aumentadores contienen $O(|\frac{V}{2}|)$ aristas, y en cada iteración se adiciona una arista al matching. Por otro lado el término $|E|$ emana del costo de encontrar en cada iteración un camino M-aumentante, lo cual por lo discutido anteriormente tiene costo $|E|$.

Veamos ahora un proposición que nos permitirá demostrar el teorema de König con facilidad.

Proposición 4. *Sea M^* el matching encontrado por el algoritmo de matching de cardinal máximo. Sean T los nodos en $D = D(G, M^*)$ alcanzables desde s (esto en el mismo sentido de la construcción antes expuesta). Entonces*

$$C^* = (L \backslash T) \cup (R \cap T)$$

es un cubrimiento de G que satisface

$$|C^*| = |M^*|$$

Demostración. Vemos primero que C^* es un cubrimiento de G. Supongamos por contradicción que no lo es. Luego existe una arista $e = ab \in E$ que no es incide sobre ningún vertice de C^*. Dado que G es bipartito podemos suponer spg que $a \in L, b \in R$. Ahora como la arista no es cubierta ocurre que $a \in (\text{Ł} \cap T), b \in (R \backslash T)$. Notemos que toda arista $e \in E$ aparece en el digrafo $D(G, M^*)$ con una dirección dada. Estudiemos la dirección de la arista $e = ab$ que estamos considerando. Supongamos primero que e cumple $t(e) = a, h(e) = b$. En este caso notamos que a es alcanzable y e une a con b en esa dirección. Luego ocurriría que $b \in T$ lo cual es una contradicción pues $b \in (R \backslash T)$. Supondamos ahora que $t(e) = b$ y $h(e) = a$. Notemos que la arista está direccionada de R a L, luego por definición de $D(G, M)$ esta arista debe pertenecer al matching M^*. En particular como M^* es matching, todo dicamino que entra alguna vez a R y que llega a a debe contener a e como última arista. Notemos ahora que $a \in (\text{Ł} \cap T)$ luego es alcanzable y esta en L. Pero como la arista e perteneciente al matching M^* incide sobre a, luego por definición de $D(G, M^*)$, a no es alcanzable directamente desde s, si no que es alcanzable por un camino que pasa por R. Tal camino debe incluir la arista e, y por ende debe pasar por b. Esto muestra que b es alcanzable lo cual es una contradicción pues $b \in (R \backslash T)$. Obtenemos así una contradicción con lo cual C^* debe ser recubrimiento de G.

Veamos ahora la identidad de los cardinales. Notemos primero que dado resultados anteriores, $|C^*| \geq |M^*|$. Nos bastará luego probar que $|C^*| \leq |M^*|$. Construiremos una inyección

$$\varphi \colon C^* \to M^*$$

Es natural esperar que esta función le entregue a cada nodo $v \in C^*$ una arista del matching M^* que incida sobre v. Para poder hacer esto debemos probar que todo sobre todo vértice $v \in C^*$ incide una arista del matching M^*. Para esto razonemos por casos. Consideremos primero $v \in (L \backslash T)$. Notemos luego que v no es alcanzable y en particular no debe ser alcanzable desde s directamente, con lo cual, por definición de $D(G, M^*)$ debe existir una arista del matching M^* incidente sobre v. Consideremos ahora $v \in (R \cap T)$. Notemos que v es alcanzable desde s en particular existe un sv-dicamino en $D(G, M^*)$. Luego si v no tuviera una arista de M^* que incide sobre él, entonces por un lema antes demostrado, existiría un camino M^* aumentante en G lo que contradice la maximalidad del matching M^*. Luego para todo $v \in C^*$ existe una arista de M^* incidente en v la cual además es única dado que M^* es matching. Denotemos a esta arista por e_v. Luego podemos definir correctamente

$$\varphi \colon C^* \to M^*$$
$$v \to e_v$$

Tenemos la función que deseamos pero nos basta verificar que es inyectiva. Supongamos por contradicción que no lo es. En tal caso existen $v, w \in C^*$ con $e_v = e_w$ pero $v \neq w$. Denotemos por $e = e_v = e_w$. Notemos que como el grafo es bipartito, entonces podemos asumir spg que $v \in L, w \in R$. Como $v, w \in C^*$ tenemos aún más que $v \in (L \backslash T), w \in (R \cap T)$. Notemos además que $e \in M^*$ luego en el digrafo $D(G, M^*)$, cumple que $t(e) = w, h(e) = v$. Notemos que w es alcanzable y existe la arista e direccionada de w a v por ende v debe ser también alcanzable. Pero esto contradice que $v \in (L \backslash T)$. Obtenemos así una contradicción. Sigue que φ es inyectiva. Sigue que $|C^*| \leq |M^*|$. En conclusión $|C^*| = |M^*|$. Se obtiene así lo deseado.

□

Notemos que como consecuencia directa del resultado anterior se concluye le teorema de König.