MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°6

3 de octubre de 2013

Resumen

- DIJKSTRA encuentra, dado un digrafo $G = (V, E)$ con pesos **no negativos** en los arcos y $v \in V$, los caminos más cortos que parten desde v en $O(|E| + |V| \log |V|)$. En pseudocódigo:

Algoritmo 1 DIJKSTRA(v)

$d_v \leftarrow 0$, $d_u \leftarrow +\infty$ para $v \neq u$.
$Q \leftarrow V$ (Q será el conjunto de nodos con distancia aún no optimizada)
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  Sacar u de Q con d_u mínimo. Si $d_u = +\infty$, terminar el algoritmo.
  for $w \in N(u)$ **do**
    Actualizar la distancia del vecino: $d_w \leftarrow \min\{d_w, d_u + c(u, w)\}$
  end for
end while

- Para encontrar los caminos más cortos entre todo par de vértices, podemos usar FLOYD-WARSHALL (no importa si hay arcos negativos). En pseudocódigo:

Algoritmo 2 FLOYD-WARSHALL

Para v y u vértices $d_{vu} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ c(e) & \text{si } e \in E \\ +\infty & \sim \end{cases}$
for $v \in V$ **do**
  for $u \in V$ **do**
    for $w \in V$ **do**
      $d_{uw} = \min\{d_{uw}, d_{uv} + d_{vw}\}$
    end for
  end for
end for

P1) (Problema del cuello de botella.) Suponga que tiene una red de transporte modelada como un grafo dirigido con vértice de inicio s, vértice de llegada t y una función de capacidad de los arcos $c : E \to \mathbb{R}^+$ (o sea, el arco e puede llevar hasta $c(e)$ unidades). Usted quiere encontrar la ruta de s a t que permite llevar la mayor cantidad posible. Diseñe un algoritmo para resolver el problema y analice su complejidad.

P2) Sea $G = (V, E)$ grafo, $c : E \to \{0, \ldots, C\}$ una función de pesos de los arcos. Muestre que en este caso se puede implementar Dijkstra en orden lineal $O(|E| + C|V|)$. (Observación: BFS es un caso especial de esto. Hint: Use un arrego de tamaño $0, \ldots, C|V|$ para guardar los vértices según su distancia.)

P3) Sea $G = (V, E)$ grafo dirigido, $c : E \to \mathbb{R}$ una función de pesos de los arcos tal que no tiene ciclos de largo negativo. Diseñe un algoritmo que encuentre el ciclo de peso mínimo. Analice correctitud y complejidad.

P4) Sea $G = (V, E)$ grafo dirigido, $c : E \to \mathbb{R}$ una función de pesos de los arcos tal que existe exactamente un arco de peso negativo. Dé un algoritmo del mismo orden que Dijkstra que encuentra todos los caminos de largo mínimo desde un vértice v.