P4 Auxiliar 2

Sea G grafo conexo, $w\colon E \to \mathbb{R}$ función de peso y sea H el subgrafo obtenido por unir todos los árboles de peso mínimo. Escriba un algoritmo que determina H en $O(|V||E|)$.

Solución:

Encontrar T árbol generador de peso mínimo.
$H \leftarrow \emptyset$
for $e \in E$ **do**
  if $e \in T$ **then**
    $H \leftarrow H + e$
  else
    $T + e$ tiene un ciclo C
    if existe un arco $e' \neq e$ en el ciclo C t.q. $w(e') \geq w(e)$ **then**
      $H \leftarrow H + e$
    end if
  end if
end for
return H

Correctitud:

Veamos que el algoritmo solamente agrega arcos que están en un árbol generador y que los agrega todos.

Si $e \in T$, obviamente $e \in H$. Si $e \notin T$, se agrega si existe e' en el ciclo obtenido al agregar e tal que $w(e') \geq w(e)$. En ese caso,

$$T' = T + e - e'$$

Así

$$w(T') = w(t) + w(e) - w(e') \leq w(T)$$

Por lo tanto, T' es árbol generador de peso mínimo, o sea $e \in H$.

Veamos ahora que efectivamente agrega todos los arcos que están en un árbol generador de peso mínimo. Sea e un arco que no es agregado a H por el algoritmo. Entonces e cumple que $\forall e' \in C\ w(e') < w(e)$. Procediendo por contradicción, sea T' un árbol generador de peso mínimo que contiene a e. Sean T_1' y T_2' las componentes conexas que obtenemos al quitar e de T'. Como el ciclo C pasa por el corte una cantidad par de veces, $\exists e' \in C$ t.q. $e' \in \delta(T_1')$ con $w(e') < w(e)$. Si entonces intercambiamos e por e' obtenemos un nuevo árbol generador, con peso menor que T', lo que es una contradicción.

Orden del algoritmo:

El primer paso, encontrar T árbol generador de peso mínimo, se puede hacer en $O(|V||E|)$ y fue visto en clases.

Al ciclo for se entra $|E|$ veces obviamente. Revisar si $e \in T$ se puede hacer en $O(|V|)$ (pues el árbol tiene $O(V)$ arcos). Lo otro difícil es revisar si existe un arco $e' \neq e\ t.q. w(e') \geq w(e)$ en el ciclo formado al agregar e a T. Si $e = uv$, hay que recorrer el camino entre u y v en el árbol y comparar los pesos de sus arcos con $w(e)$. Esto se puede hacer con un DFS en el árbol T y un DFS en un árbol toma $O(|V|)$.

Así, en total queda $O(|V||E|)$.

P3 c) Auxiliar 4

M es uniforme ssi para cada circuito C de M y cada cocircuito C^*, $C \cap C^* \neq \emptyset$.

Solución:

Recuerdo 1: M se dice uniforme si existe k tal que X es independiente ssi $|X| \leq k$.

Recuerdo 2: En la parte b) de esta pregunta demostramos que si C es circuito y C^* un cocircuito, entonces $|C \cap C^*| \neq 1$. Usaremos este resultado.

Si $M = (E, \mathcal{I})$ es uniforme, con $|E| = n$, todo conjunto de tamaño k es base, y todo conjunto de tamaño $n-k$ es cobase. Los circuitos son entonces los conjuntos de tamaño $k+1$ y los cocircuitos son los conjuntos de tamaño $n-k+1$. Sea C un circuito y C^* un cocircuito.

$$|(C \cap C^*)^c| = |C^c \cup C^{*c}| \leq |C^c| + C^{*c}| = n - k - 1 + k - 1 = n - 2$$

Por lo tanto, $|C \cap C^*| \geq 2$.

La otra implicancia la haremos por contradicción. Supongamos que para cada circuito C y cada cocircuito C^*, $C \cap C^* \neq \emptyset$, pero que M no es uniforme. Sea k el tamaño de una base de E. Como M no es uniforme, existe un conjunto X de tamaño k que es dependiente. Sea $C \subseteq X$ circuito. Luego $|C| \leq k$. Sea $f \in C$ (pues $C \neq \emptyset$, ya que es un conjunto dependiente). Como C es circuito, $C - f$ es independiente. Extendiendo $C - f$ a una base, existe una base B tal que $C - f \subseteq B$. Tomando complemento a esto último, obtenemos que

$$B^c \subseteq E - C + f$$

Como $|B^c| = n - k$ pero $|E - C + f| = n - |C| + 1 \geq n - k + 1$, la inclusión es estricta. Como B^c es cobase, esto implica que $E - C + f \notin \mathcal{I}^*$. Entonces existe C^* cocircuito tal que

$$C^* \subseteq E - C + f$$

Sea $e \in C \cap C^*$. Como $e \in C^*$, la inclusión anterior nos dice que $e \in C^c$ ó $e = f$. Pero como $e \in C$, solamente puede ser que $e = f$. Hemos demostrado entonces que $C \cap C^* \subseteq \{f\}$. Si $C \cap C^* = \{f\}$ sería una contradicción con la parte anterior (ver Recuerdo 2), por lo que solo puede ser que $C \cap C^* = \emptyset$. Esto es una contradicción.