MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Andrés Cristi y David Hasson.
Fecha: 2 de Septiembre de 2013.

Cátedra 5

1. Matroides

Recordemos la definición de una matroide:

Definición 1 (Matroide)**.** Una matroide es un *par hereditario* $M = (E, \mathcal{I})$, esto es, tal que cumple:

(I_0) $\phi \in \mathcal{I}$.

(I_1) $X \in \mathcal{I}$, $Y \subseteq X \implies Y \in \mathcal{I}$.

Y además satisface el axioma de *Aumento*:

(I_2) $X, Y \in \mathcal{I}$, $|X| < |Y| \implies \exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$.

Observación 1. (I_2) es equivalente a:

- *(Aumento débil):* $X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y \setminus X| = 2, |X \setminus Y| = 1 \implies \exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$.
- *(Cardinalidad de las Bases):* $\forall F \subseteq E$, las bases de F tienen el mismo cardinal.

Demostración.

- *Aumento* $\implies$ *Cardinalidad de las Bases*:

  Por contradicción: Sea F tal que X, Y son bases de distinto cardinal, supongamos sin pérdida de generalidad que $|X| < |Y|$. Luego, por hipótesis, $\exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$ pero, $X + z \subseteq F$, lo que contradice que X es base de F.

- *Cardinalidad de las Bases* $\implies$ *Aumento débil*:

  Sean $X, Y \in \mathcal{I}$ tales que $|Y \setminus X| = 2$, $|X \setminus Y| = 1$. De esto sigue que $|X| + 1 = |Y|$. Entonces $X \in \mathcal{I}$ no puede ser base de $X \cup Y \subseteq E$. En efecto, existe $Y \in \mathcal{I}$ tal que $|Y| > |X|$, además, por *Cardinalidad de las Bases*, toda base B de $X \cup Y$ debe cumplir $|B| \geq |Y|$. Por lo anterior, $\exists z \in (X \cup Y) \setminus X = Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$.

- *Aumento débil* $\implies$ *Aumento*:

  Sean $X, Y \in \mathcal{I}$ tales que $|X| < |Y|$. Procederemos usando inducción sobre $|X \setminus Y|$: Si $|X \setminus Y| = 0$, entonces $X \subseteq Y$, y luego para cada z en $Y \setminus X$, se tiene que $X + z \in \mathcal{I}$. Por otro lado, si $|X \setminus Y| = 1$, podemos aplicar *Aumento débil* al par $X, Y' \subseteq Y$, con $|Y' \setminus X| = 2$. Ahora supongamos que *Aumento* se cumple para todo par con $|X \setminus Y| < i$. Veamos el caso $|X \setminus Y| = i$: Sean $x \in X \setminus Y$, $X' = X - x$. Por hipótesis de inducción, como $|X' \setminus Y| < i$, entonces existe $z \in Y \setminus X'$ tal que $X' + z \in \mathcal{I}$. Pero $|(X' + z) \setminus Y| < i$ y $|Y| > |X' + z|$. Luego, por hipótesis de inducción, existe $z' \in Y \setminus (X' + z)$ tal que $(X' + z + z') \in \mathcal{I}$. Entonces podemos aplicar *Aumento débil* al par $(X, X' + z + z')$. De esto se obtiene que o bien $X + z \in \mathcal{I}$, o bien $X + z' \in \mathcal{I}$.

□

Antes de enunciar el siguiente teorema, recordemos el algoritmo Glotón-base:

Algoritmo 1 Glotón-base

Dados $M = (E, \mathcal{I})$ y $w : E \to \mathbb{R}$.
Ordenar $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ de mayor a menor peso.
$S \leftarrow \phi$
for i=1,...,m **do**
    if $S + e_i \in \mathcal{I}$ **then**
        $S \leftarrow S + e_i$
    end if
end for
Devolver S

Teorema 1. *Si $M = (E, \mathcal{I})$ es una matroide, $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso, entonces Glotón-base devuelve una base de peso máximo de E.*

Demostración.

Sea S el conjunto devuelto por Glotón-Base y sea T otra base, tal que $w(T) > w(S)$.

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_k\},$$
$$T = \{t_1, t_2, ..., t_l\},$$

ordenados de mayor a menor peso. Sabemos que $l = k$ por *Cardinalidad de las bases*. Como $w(T) > w(S)$, $\exists i$ tal que $w(s_i) < w(t_i)$. Sean

$$S' = \{s_1, ..., s_{i-1}\},$$
$$T' = \{t_1, ..., t_i\}.$$

Por axioma de *Aumento*, como $|S'| < |T'|, \exists t_j \in T' \setminus S'$ tal que $S' + t_j \in \mathcal{I}$. Además, como $t_j \in T', w(t_j) \geq w(t_i) > w(s_i)$. Luego, el algoritmo evalúa a t_j antes que s_i, en un momento en que tiene a algún $S'' \subseteq S'$. Como $S'' + t_j \subseteq S' + t_j$, entonces es independiente, por lo que el algoritmo debió haber agregado a t_j, lo cual no ocurrió (y entonces llegamos a una contradicción).

□

Observación 2. En particular, si aplicamos Glotón, podemos resolver problemas como:

- Base de peso mínimo en una matroide vectorial.
- Base maximal de peso máximo en un grafo (matroide gráfica).

Teorema 2. *Para todo par hereditario $(E, \mathcal{I})$ que no es matroide, $\exists w : E \to \mathbb{R}$ tal que Glotón-Base no retorna una base de peso máximo.*

Demostración.

Como no es matroide, $\exists X, Y \in \mathcal{I}$ tales que $|Y| > |X|$ y $\forall z \in Y \setminus X, X + z \notin \mathcal{I}$.
Definamos $w : E \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$w(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X \cup Y \\ M+2 & \text{si } e \in X, \\ M+1 & \text{si } e \in X \setminus Y \end{cases} \quad \text{con } M > |X|$$

Luego, Glotón devuelve un conjunto de peso $(M + 2)|X|$, pues primero agrega los elementos de X y después ya no puede agregar elementos de Y. Pero Y tiene peso:

$$\begin{aligned} (M+1)|Y \setminus X| + (M+2)|X \cap Y| &= (M+1)|Y| + |X \cap Y| \\ &\geq (M+1)(|X|+1) + |X \cap Y| \\ &\geq (M+1)|X| + |X| + 1 \\ &> (M+2)|X|. \end{aligned}$$

$\square$

Observación 3. De los dos teoremas anteriores se concluye que el algoritmo Glotón-base caracteriza a las matroides.

Observación 4. Notemos que toda matroide gráfica es una matroide vectorial. Además, toda matroide uniforme es matroide vectorial. En efecto, se puede probar que todas las matroides uniformes son representables en $\mathbb{R}$. Lo anterior puede inducir al lector a creer que toda matroide es representable. Esto no es cierto, como se muestra a continuación:

Ejemplo 1. (Ejemplo de matroide no representable)
Para presentar este contraejemplo nos apoyaremos en el Teorema de Pappus, que es válido en cualquier espacio vectorial.

Teorema 3. *Si en un par de rectas escogemos tres puntos al azar en cada una y los unimos dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen son colineales.*

Usaremos la siguiente figura, que ilustra este resultado en $\mathbb{R}^2$:

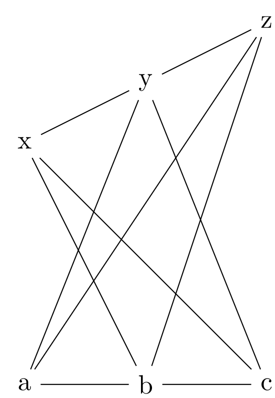

Figura 1: Representación geométrica de la *Matroide Non-Pappus*

Sean p, q y r los puntos definidos como $p = \overline{ay} \cap \overline{bx}, q = \overline{az} \cap \overline{cx}$ y $r = \overline{cy} \cap \overline{bz}$. La matroide *Non-Pappus* se define como $M = (E, \mathcal{I})$, con $E = \{a, b, c, x, y, z, p, q, r\}$, donde todos los subconjuntos de cardinal 3 o menor, excepto xyz, abc, apy, aqz, bpx, brz, cqx y cry (todas las líneas), son independientes. Así, $pqr \in \mathcal{I}$. Con esto, podemos ver que la matroide *Non-Pappus* no es representable sobre ningún cuerpo.

Por lo tanto, las matroides vectoriales no son suficientes para estudiar las matroides.

2. Glosario

Sea $(E, \mathcal{I})$ matroide.

- E : Conjunto de referencia.
- $X \in \mathcal{I}$: Conjuntos independientes.
- $X \notin \mathcal{I}$: Conjuntos dependientes.
- Sea $F \subseteq E$, los subconjuntos maximales de F que son independientes se llaman bases de F.
- Los conjuntos $C \subseteq E$, mínimamente dependientes se llaman circuitos ($C \notin \mathcal{I}$ y $\forall J \subsetneq C,\ J \in \mathcal{I}$). Por ejemplo, los ciclos corresponden a circuitos en matroides gráficas.
- $\forall X \subseteq E$, definimos:
  - El **rango** de X como $r(X) = \{|I| : I \text{ es base de } X\}$

- El **generado** $\text{Span}(X)$ como el conjunto maximal $X \subseteq \text{Span}(X) \subseteq E$ tal que $r(X) = r(\text{Span}(X))$.

Observación 5. Notemos que $x \in \text{Span}(X)$ si $x \in X$ o $X + x$ contiene un circuito que incluya a x.

Ejemplo 2. (Rango en el caso de una matroide gráfica)

Sea $G = (V, E)$ un grafo, M la matroide gráfica asociada a G y r su función de rango. Calculemos $r(F)$ para $F \subseteq E$.

- Si $G' = (V, F)$ es conexo, $r(F) = |V(F)| - 1$, donde $V(F)$ es el conjunto de vértices que toca F.
- Dado lo anterior, si $G' = (V, F)$ no es conexo, $r(F) = |V(F)| - \text{cc}(G')$, donde $\text{cc}(G')$ es el número de componentes conexas de G'.