MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Complemento 2: Matroides

Algunas definiciones axiomáticas de matroides.

Las matroides nacen como una axiomatización de lo que significa ser "independiente" o comportarse "como columnas de una matriz" (de allí su nombre). Las matroides pueden caracterizarse de muchísimas maneras diferentes, a continuación listaremos *sólo algunas* de ellas en función de objetos estudiados en el curso. Les puede servir demostrar algunas de estas equivalencias para ejercitar los diferentes conceptos. En todas las definiciones siguientes supondremos que E es un conjunto finito dado.

Definición 1 (Par hereditario). $(E,\mathcal{I})$ es un par hereditario si $\mathcal{I} \subseteq 2^V$ satisface $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y $\forall X \in \mathcal{I}$, $Y \subseteq X$ implica que $Y \in \mathcal{I}$.

Definición 2 (Clutter). $(E,\mathcal{C})$ es un *clutter* si $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ satisface $\mathcal{C} \neq \emptyset$ y $\forall X,Y \in \mathcal{C}$, $X \subseteq Y$ implica que $X = Y$ (i.e., ningún conjunto contiene a otro).

A continuación listamos varias definiciones alternativas de matroides:

Definición 3 (Definición por conjuntos independientes). Sea $(E,\mathcal{I})$ un par hereditario que satisface cualquiera de los siguientes axiomas equivalentes:

(A) Si $X,Y \in \mathcal{I}$, $|X| < |Y|$ entonces $\exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + e \in \mathcal{I}$.

(A') Si $X,Y \in \mathcal{I}$, $|X \setminus Y| = 1$, $|Y \setminus X| = 2$ entonces $\exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + e \in \mathcal{I}$.

Entonces el par $(E,\mathcal{I})$ es una matroide.

Definición 4 (Definición por bases). Sea $(E,\mathcal{B})$ un clutter que satisface cualquiera de los siguientes axiomas equivalentes:

(B) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \setminus B_2$ entonces existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 - x + y \in \mathcal{B}$.

(B') Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \setminus B_2$ entonces existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_2 + x - y \in \mathcal{B}$.

Si definimos $\mathcal{I} = \{F \subseteq E \colon F \text{ es subconjunto de algún } B \in \mathcal{B}\}$, entonces el par $(E,\mathcal{I})$ es una matroide y el conjunto $\mathcal{B}$ es su conjunto de bases.

Definición 5 (Definición por circuitos). Sea $(E,\mathcal{C})$ un clutter con $\emptyset \notin \mathcal{C}$ que satisface el siguiente axioma:

(C) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ y $z \in X \cap Y$ entonces $\exists C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq (C_1 \cup C_2) - z$.

Si definimos $\mathcal{I} = \{F \subseteq E \colon F \text{ no contiene ningún } C \in \mathcal{C} \text{ como subconjunto}\}$, entonces el par $(E,\mathcal{I})$ es una matroide y el conjunto $\mathcal{C}$ es su conjunto de circuitos.

Definición 6 (Definición por rango)**.** Sea $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ una función que satisface los tres axiomas siguientes:

(R1) $\forall S \subseteq E$, $0 \leq r(S) \leq |S|$.

(R2) Si $S \subseteq T \subseteq E$, entonces $r(S) \leq r(T)$.

(R3) r es submodular, es decir, $\forall S, T \subseteq E$, $r(S \cup T) + r(S \cap T) \leq r(S) + r(T)$.

Si definimos $\mathcal{I} = \{F \subseteq E \colon r(F) = |F|\}$, entonces el par $(E, \mathcal{I})$ es una matroide y la función r es su función de rango.

Definición 7 (Definición por generador)**.** Sea $\text{span}\colon 2^E \to 2^E$ una función que satisface los cuatro axiomas siguientes:

(S1) $\forall S \subseteq E$, entonces $S \subseteq \text{span}(S) \subseteq E$.

(S2) $\forall S \subseteq E$, $\text{span}(\text{span}(S)) = \text{span}(S)$.

(S3) Si $S \subseteq T$ entonces $\text{span}(S) \subseteq \text{span}(T)$.

(S4) Si $x \notin \text{span}(S)$ pero $x \in \text{span}(S + y)$ entonces $y \in \text{span}(S + x)$.

Si definimos $\mathcal{I} = \{F \subseteq E \colon \forall x \in F \colon x \notin \text{span}(X - x)\}$, entonces el par $(E, \mathcal{I})$ es una matroide y la función span es su función de generación (span).

Definición 8 (Definición por algoritmo glotón)**.** Sea $(E, \mathcal{I})$ un par hereditario que satisface cualquiera de los siguientes axiomas equivalentes:

(G) $\forall w \colon E \to \mathbb{R}$, el algoritmo glotón-independiente encuentra un conjunto en $\mathcal{I}$ de peso máximo.

(G') $\forall w \colon E \to \mathbb{R}$, el algoritmo glotón-base encuentra un conjunto en $\mathcal{I}$ maximal para inclusión (una base) de peso máximo.

Entonces el par $(E, \mathcal{I})$ es una matroide.