Complemento 1: Definiciones Básicas de Grafos no dirigidos

MA4701: Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto.

19/08/2013

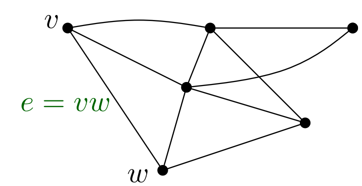
Grafos: Dos definiciones

Grafo Simple

Un grafo simple G es un par (V, E) donde

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}.$$

- Los $v \in V$ se denominan vértices.
- Los $e \in E$ se denominan aristas.
- Denotamos $e = \{u, v\}$ como $e = uv = vu$.
- Los vértices u y v de una arista e se denominan extremos de e.

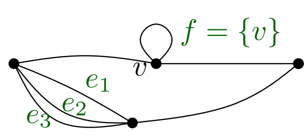


Grafos: Dos definiciones

(Muti)Grafo

Un grafo G es un par (V, E), donde a cada arista $e \in E$ se le asigna un conjunto de extremos que puede ser $\{u, v\} \subseteq \binom{V}{2}$ o un singleton $\{v\}$, con $v \in V$.

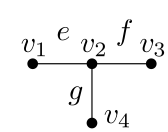
- Aristas de un sólo extremo: búcles o loops.
- Aristas con extremos iguales: paralelas.
- Abusando notación escribimos $e = \{u\}$ para el búcle de extremo u y $e = uv$ para una arista de extremos u y v.
- Un grafo sin búcles ni aristas paralelas es un grafo simple.



Notaciones básicas

Dado un grafo G.

- Una arista e es incidente a un vértice v si v es extremo de e.
- Dos aristas son adyacentes si son incidentes a un vértice en común.
- Dos vértices u y v son adyacentes o vecinos si existe una arista de extremos u y v.
- El órden de un grafo es $|V|$ y solemos denotar $n = |V|$.
- El tamaño de un grafo es $|E|$ y solemos denotar $m = |E|$.



Convenciones

- A no ser que se diga lo contrario cuando decimos “grafo” nos referimos a un grafo simple.
- Si $G = (V, E)$ escribimos $V = V(G)$ y $E = E(G)$. También decimos que G es un grafo en V con aristas E.
- Además asumiremos que $|V|, |E| < \infty$.

Ejemplos simples de grafos

- El grafo trivial $(\emptyset, \emptyset)$.
- El grafo completo

$$K_n = \left([n], \binom{[n]}{2}\right) = (\{1, \dots, n\}, \{ij : i < j\}).$$

- El complemento del grafo completo

$$\overline{K_n} = ([n], \emptyset)\,.$$

- Dada una relación simétrica $\sim$ en V, el grafo

$$G_\sim = (V, \{uv : u \neq v, u \sim v\}.$$

Conjuntos notables de un grafo simple $G = (V, E)$.

- Dados $U, W \subseteq V$, $U \cap W = \emptyset$, $F \subseteq E$,

$$F[U, W] = \{e = uv \in F : u \in U, v \in W\}.$$

- Si $v \in V$, $U \subseteq V$ y $F \subseteq E$ definimos

$$\begin{aligned}
\delta_F(v) &= \{e \in F : e \text{ es incidente a } v\} = F[\{v\}, V \setminus \{v\}].\\
\delta_F(U) &= \{e \in F : e \text{ es incidente a algún } v \in U \text{ y a algún } v \notin U\}\\
&= F[U, V \setminus U].\\
N_F(v) &= \{w \in V \setminus \{v\} : \exists e \in F, e = vw\}.\\
N_F(U) &= \{w \in V \setminus U : \exists v \in U, \exists e \in F, e = vw\}.
\end{aligned}$$

  Cuando $F = E$ omitimos el subíndice.
- Los conjuntos $\delta(v)$ y $\delta(U)$ se llaman los cortes asociados a v y U.
- Los conjuntos $N(v)$ y $N(U)$ son los vecinos de v y U.
- La cantidad $d(v) = |\delta(v)| = |N(v)|$ es el grado de v.

Subgrafos.

- Un grafo $G' = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$;
  en tal caso escribimos $G' \subseteq G$.
  OBS: Como G' es grafo, se deduce también que $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$.
- Dado $U \subseteq V$; el subgrafo de G inducido por U es el grafo

$$G[U] = (U, \{e = uv \in E : u, v \in U\}) = \left(U, E \cap \binom{U}{2}\right).$$

- Dado $F \subseteq E$, el grafo obtenido al borrar F de G es

$$G \setminus F = (V, E \setminus F).$$

- Dado $U \subseteq V$, el grafo obtenido al borrar U de V es

$$G \setminus U = G[V \setminus U].$$

Paseos, Caminos y ciclos

- Un paseo es una secuencia

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \cdots e_k v_k$$

  donde $v_i \in V, e_i \in E, e_i = v_{i-1} v_i$.
- El largo del paseo es el número de aristas del mismo.
- Un paseo es arista-simple si todas las aristas son distintas.
- Si todos los v_i son distintos, P se llama camino entre v_0 y v_k. También llamamos camino al grafo $(\{v_i\}_{i=0}^k, \{e_i\}_{i=1}^k)$. Abusando notación, el conjunto $\{e_i\}_{i=1}^k$ también se llama camino.
- Si todos los v_i son distintos, excepto $v_0 = v_k$, P se llama ciclo. También llamamos ciclo al grafo $(\{v_i\}_{i=0}^{k-1}, \{e_i\}_{i=1}^k)$. Abusando notación, el conjunto $\{e_i\}_{i=1}^k$ también se llama ciclo.

Conectividad y Generación

- Un grafo $G = (V, E)$ se dice conexo si para cada $u, v \in V$ existe un paseo entre u y v (equivalentemente, existe un camino).
- Una componente conexa de G es un conjunto maximal de vértices W tal que $G[W]$ es conexo.
- Sean $F \subseteq E$ y $U \subseteq V$. Decimos que F genera U si para todo vértice $u \in U$, existe una arista $e \in F$ incidente a u.

  También decimos que un grafo G' genera U si $E(G')$ genera U. Un subgrafo $G' \subseteq G$ es generador si G' genera $V(G)$.

Árboles

Bosque
Un bosque es un grafo sin ciclos.

Árbol
Un árbol es un bosque conexo.