Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
19 de noviembre de 2013

Auxiliar 13: Medidas de Radon y teorema de Riesz

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. El objetivo de este problema es demostrar el siguiente teorema de Krylov-Bogoliubov:

Sea X un espacio métrico compacto y $T\colon X \to X$ una transformación continua. Entonces existe una medida de probabilidad boreliana μ que es T-invariante, es decir, tal que $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$.

Para esto, se propone el siguiente esquema:

(a) Para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ considere

$$S_f^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x))$$

con $x \in X$ fijo. Muestre que existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{N_k\}k \in \mathbb{N}$ tal que $S_f^{N_k}(x)$ converge para todo $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

(b) Sea $L_x(f) = \lim_{k\to\infty} S_f^{N_k}(x)$. Muestre que L_x es un funcional lineal continuo de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

(c) Concluya.

P2. **(a)** Se dice que un espacio topológico X es completamente regular si para todo $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado que no contiene a x existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_F = 1$.

Muestre que si X es completamente regular, entonces $x_n \to x$ si y sólo si δ_{x_n} converge débilmente a δ_x.

(b) Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión de medidas que convergen débilmente a una medida μ en un espacio topológico X. Muestre que si $f \geq 0$ es continua, entonces

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n.$$

Nota. Recuerde que se dice que una sucesión de medidas borelianas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a una medida boreliana μ si

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu$$

para toda función $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua y acotada.