

Examen

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

- P1.** (a) Sea $(X, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio de probabilidad con ν una medida no atómica. Recuerde que lo anterior implica que para todo $A \in \mathcal{B}$ y para todo $c \in [0, \nu(A)]$ existe $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{B}$ con $\nu(B) = c$.
- i) [2 pts.] Considere el conjunto $D = \{\frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} \cap [0, 1]$, los números diádicos en $[0, 1]$. Muestre que existe una familia $\{A_x\}_{x \in D} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\nu(A_x) = x$ para todo $x \in D$ y tal que para todo $x, x' \in D$ se tiene $A_x \subseteq A_{x'}$ o $A_{x'} \subseteq A_x$.
- ii) [2 pts.] Considere $f: X \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(y) = \inf\{x \in D \mid y \in A_x\}$. Pruebe que f es $\mathcal{B}$ -medible y que $\nu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}([0, 1])$, donde μ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Concluya que existe un conjunto no numerable y de medida 0 en $\mathcal{B}$.
- (b) [2 pts.] Sea $\mathcal{A}$ una σ -álgebra de $\mathbb{N}$. Pruebe que existe una colección de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ disjuntos a dos a dos con $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i\}_{i \in I})$.

Indicación. Defina una relación de equivalencia.

- P2.** Consideremos μ una medida finita definida en $\mathcal{B}$ la σ -álgebra boreliana del intervalo $[0, 1]$. Definimos la función característica de μ como la función $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ siguiente

$$\psi(t) = \int e^{itx} d\mu(x) = \int \cos(tx) d\mu(x) + i \int \sin(tx) d\mu(x).$$

- (a) [1 pto.] Pruebe que ψ está bien definida y que es una función continua.
- (b) [2 pts.] Pruebe que para $T > 0$ las integrales siguientes están bien definidas y

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \psi(t) dt &= \int \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt d\mu(x) \\ &= 2 \int \operatorname{sgn}(x-a) S(T|x-a|) - \operatorname{sgn}(x-b) S(T|x-b|) d\mu(x), \end{aligned}$$

donde $S(u) = \int_0^u \frac{\sin(x)}{x} dx$, para $u \geq 0$, y sgn es la función signo.

Indicación. Le puede ser útil usar la desigualdad $|e^{ir} - e^{is}| \leq |r - s|$.

- (c) [2 pts.] Usando que $\lim_{u \rightarrow \infty} S(u) = \frac{\pi}{2}$, demuestre que si $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \psi(t) dt = \mu((a, b]).$$

- (d) [1 pto.] Suponga que μ y ν son medidas finitas en $\mathcal{B}$ tales que $\mu(\{x\}) = \nu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que si μ y ν tienen la misma función característica, entonces $\mu = \nu$.

- P3.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de eventos medibles. Recuerde que $\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$.

- (a) [2 pts.] Muestre que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
- (b) [4 pts.] Suponga que los $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son independientes. Pruebe que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Indicación. Le puede servir probar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right) \leq \prod_{k=n}^{n+j} \exp(-\mathbb{P}(A_k)).$$