Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
17 de diciembre de 2013

Examen

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. (a) Sea $(X, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio de probabilidad con ν una medida no atómica. Recuerde que lo anterior implica que para todo $A \in \mathcal{B}$ y para todo $c \in [0, \nu(A)]$ existe $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{B}$ con $\nu(B) = c$.

I) **[2 pts.]** Considere el conjunto $D = \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \cap [0,1]$, los números diádicos en $[0,1]$. Muestre que existe una familia $\{A_x\}_{x \in D} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\nu(A_x) = x$ para todo $x \in D$ y tal que para todo $x, x' \in D$ se tiene $A_x \subseteq A_{x'}$ o $A_{x'} \subseteq A_x$.
Solución. Tomamos $A_0 = \varnothing$ y $A_1 = X$. Así, la propiedad es válida para los números de la forma $\frac{m}{2^0} \in [0,1]$ con $m \in \mathbb{N}$.
Supongamos que ya se tiene para todos los números de la forma $\frac{m}{2^n} \in [0,1]$, es decir, que ya están definidos los conjuntos $A_{m/2^n}$ y verifican la propiedad del enunciado. Definiremos los conjuntos $A_{m/2^{n+1}}$.
Notemos que $\frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n}$, por lo que si m es par estamos listos. Supongamos entonces que $m = 2k+1$. Se tiene que

$$\nu(A_{(k+1)/2^n} \setminus A_{k/2^n}) = \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Por la propiedad del enunciado, existe $B \subseteq A_{(k+1)/2^n} \setminus A_{k/2^n}$ con $\nu(B) = \frac{1}{2^{n+1}}$. Definimos así

$$A_{(2k+1)/2^{n+1}} = A_{k/2^n} \cup B$$

Se tiene que $A_{k/2^n} \subseteq A_{(2k+1)/2^{n+1}} \subseteq A_{(k+1)/2^n}$, por lo que se cumple todo lo deseado.

II) **[2 pts.]** Considere $f \colon X \to [0,1]$ dada por $f(y) = \inf\{x \in D \mid y \in A_x\}$. Pruebe que f es $\mathcal{B}$-medible y que $\nu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}([0,1])$, donde μ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Concluya que existe un conjunto no numerable y de medida 0 en $\mathcal{B}$.
Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,t)) &= \{y \in X \mid f(y) < t\} \\ &= \{y \in X \mid \inf\{x \in D \mid y \in A_x\} < t\} \\ &= \{y \in X \mid \exists x \in D, x < t, y \in A_x\} \\ &= \bigcup_{\substack{x<t \\ x \in D}} A_x. \end{aligned}$$

Notemos que $f^{-1}([0,t))$ es una unión numerable de elementos de $\mathcal{B}$, por lo que está en $\mathcal{B}$. Luego, f es $\mathcal{B}$-medible.
Como los $\{A_x\}_{x<t, x \in D}$ son encajonados, por continuidad de la medida se tiene además que

$$\nu(f^{-1}([0,t))) = \nu\left(\bigcup_{x<t} A_x\right) = \lim_{\substack{x \to t \\ x \in D}} \nu(A_x) = t$$

Como además se tiene que

$$\nu(f^{-1}([a,b))) = \nu(f^{-1}((0,b]) \setminus f^{-1}((0,a])) = \nu(f^{-1}((0,b])) - \nu(f^{-1}((0,a])) = b - a$$

concluimos que $\nu(f^{-1}(\cdot))$ coincide con la medida de Lebesgue en los intervalos de la forma $[a, b)$. Como además coincide en $\{1\}$ y en $[0, 1]$, por el teorema de extensión de Carathéodory obtenemos que ambas medidas son iguales.
Finalmente, tomando $C \subseteq [0, 1]$ el conjunto de Cantor estándar tenemos que $f^{-1}(C)$ es no numerable y que $\nu(f^{-1}(C)) = \mu(C) = 0$, por lo que se obtiene lo deseado.

(b) **[2 pts.]** Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de $\mathbb{N}$. Pruebe que existe una colección de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ disjunta dos a dos con $\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i\}_{i\in I})$.

Indicación. Defina una relación de equivalencia.

Solución. Definamos la relación de equivalencia

$$n \sim m \iff (n \in B \iff m \in B \quad \forall B \in \mathcal{A})$$

y sean $\{A_i\}_{i\in I}$ las clases de equivalencia dadas por esta relación.

Veamos que A_i es medible. Sea $n \in A_i$ y notemos que si $m \not\sim n$, entonces existe $B_m \in \mathcal{A}$ tal que $n \in B_m$ y $m \notin B_m$. Notemos además que $A_i \subseteq B_m$ por la definición de la relación de equivalencia. Luego,

$$A_i = \bigcap_{m \not\sim n} B_m$$

Esto muestra que $\sigma(\{A_i\}_{i\in I}) \subseteq \mathcal{A}$. Por otro lado, sea $A \in \mathcal{A}$. Si $n \in A$, se tiene que entonces $[n] \subseteq A$ por la definición de $\sim$, por lo que

$$A = \bigcup_{n\in A} [n].$$

Como cada $[n]$ es igual a algún A_i, concluimos que $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\{A_i\}_{i\in I})$.