

Control 3

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Consideremos $[0, 1]$ con $\mathcal{B}$ la σ -álgebra Boreliana. Denotamos por M al conjunto de todas las medidas (positivas) definidas en $\mathcal{B}$ y finitas.

- (a) El objetivo de este problema es demostrar que el conjunto $B = \{\mu \in M : \mu([0, 1]) \leq 1\}$ es compacto en la topología débil, que es metrizable (no lo pruebe) y está dada por

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ ssi } \forall f \in \mathcal{C}([0, 1]) \text{ se tiene } \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu.$$

Demostremos que toda sucesión en B tiene una subsucesión convergente. Sea entonces (μ_n) una sucesión en B .

- i) **[1,5 pts.]** Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([0, 1])$ un conjunto denso numerable en $\mathcal{C}([0, 1])$, con la topología uniforme. Pruebe que existe una subsucesión (μ_{n_k}) de (μ_n) tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_j \mu_{n_k}$ existe para todo $j \in \mathbb{N}$. Piense en un argumento diagonal.
- ii) **[1 pto.]** Pruebe que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \mu_{n_k}$ existe para cualquier $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Para ello pruebe que $(\int f d\mu_{n_k})_k$ es de Cauchy. Definimos $L: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f \mu_{n_k}.$$

- iii) **[2,5 pts.]** Concluya.

- (b) **[1 pto.]** Pruebe que $\varphi: [0, 1] \rightarrow M$ dado por $\varphi(x) = \delta_x$ define un homeomorfismo en su imagen al considerar la topología débil en M , pero que esto no es cierto al considerar la topología dada por la variación total en M que está asociada a la norma

$$\|\mu - \nu\| = |\mu - \nu|([0, 1]),$$

donde $|\mu - \nu|$ es la variación de la medida con signo $\mu - \nu$. Para ello, calcule $|\delta_x - \delta_y|$ para $x \neq y$.

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, donde cada X_n tiene media 0 y varianza $\mathbb{E}(X_n^2) = \sigma_n^2 < \infty$. Se define $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

- (a) Sea $S_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$. El objetivo de la primera parte del problema es probar que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\mathbb{P}(S_n^* \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2.$$

Para esto, siga los siguientes pasos:

- i) **[0,5 pts.]** Defina $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : |S_n| \geq \varepsilon\}$ (por convención $\inf \emptyset = \infty$). Muestre que $\{\tau \leq n\}$ es $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ medible para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\{\tau \leq n\} = \{S_n^* \geq \varepsilon\}$.
- ii) **[1 pto.]** Muestre que si $j \neq \ell$ e $i < j$, entonces $\mathbb{E}(X_j X_\ell \mathbb{1}_{\tau=i}) = 0$.
- iii) **[1 pto.]** Use la parte anterior para demostrar que para $k \leq n$

$$\mathbb{E}((S_n^2 - S_k^2) \mathbb{1}_{\tau=k}) = \mathbb{P}(\{\tau = k\}) \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}(X_i^2)$$

y concluir que

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{\tau=k}) = \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{\tau=k}) + \mathbb{P}(\{\tau = k\}) \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}(X_i^2) \geq \varepsilon^2 \mathbb{P}(\{\tau = k\}).$$

iv) [1,5 pts.] Concluya.

(b) Suponga ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$. Se desea probar que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguramente. Para esto, siga los siguientes pasos:

i) [1 pto.] Sean $\varepsilon > 0$ y

$$T_m^n = \max_{0 \leq k \leq n-1} |S_{m+k} - S_m|, \quad T_m = \sup_{0 \leq k} |S_{m+k} - S_m|.$$

Use la parte anterior para acotar $\mathbb{P}(\{T_m^n \geq \varepsilon\})$ y después $\mathbb{P}(\{T_m \geq \varepsilon\})$. Piense que $S_{m+k} - S_m = \sum_{j=m+1}^{m+k} X_j$.

ii) [1 pto.] Defina $T = \inf_{m \in \mathbb{N}} T_m$. Pruebe que $T = 0$ c.s. y concluya el resultado.