Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
9 de noviembre de 2013

# Control 2

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

**P1.** Considere el espacio de medida $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$, donde $dx$ es la medida de Lebesgue. Sea $1 \leq p < \infty$. Para $f \in L^p$, se dice que $f$ es **débilmente derivable** en $L^p$ si existe una función $h \in L^p$ tal que para toda función $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ con $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, se tiene que

$$\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx = -\int_0^1 h(x)\varphi(x)dx$$

En este caso diremos que la derivada débil en $L^p$ de $f$ es $h$ y lo denotaremos por $h = Df$.

**(a)** **[1 pto.]** Pruebe que si $f \in L^p$ es débilmente derivable en $L^p$, entonces su derivada débil es única.
**Indicación.** Pruebe que si $g_1, g_2$ son dos funciones integrables no negativas tales que para todo $0 \leq a \leq b \leq 1$ se tiene que $\int_a^b g_1(x)dx = \int_a^b g_2(x)dx$, entonces $g_1 = g_2$ c.t.p..

**(b)** **[1 pto.]** Pruebe que si $R, S\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ son dos funciones absolutamente continuas, entonces satisfacen la fórmula de integración por partes, esto es,

$$\int_0^1 \dot{R}(x)S(x)dx = R(1)S(1) - R(0)S(0) - \int_0^1 R(x)\dot{S}(x)dx.$$

**Indicación.** Pruebe por definición que el producto $R \cdot S$ es una función absolutamente continua.

**(c)** **[1 pto.]** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Pruebe que la derivada usual y la derivada débil en $L^1$ de $f$ coinciden, esto es, $Df = \dot{f}$ c.t.p..

**(d)** **[0,5 pts.]** Pruebe que la derivada débil es lineal, esto es, que para $f, g \in L^p$ débilmente derivables y para $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $f + \lambda g$ es débilmente derivable y $D(f + \lambda g) = Df + \lambda Dg$.

**(e)** **[0,5 pts.]** Pruebe que $D\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 0$ c.t.p..

**(f)** **[2 pts.]** Sea $f \in \mathcal{C}[0,1]$ una función tal que $f(0) = f(1) = 0$. Supongamos que $1 < p < \infty$ y que $q$ es su índice conjugado, esto es $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suponga que existe una constante $C < \infty$ tal que

$$\left|\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx\right| \leq C||\varphi||_q \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Pruebe que $f$ es débilmente derivable en $L^p$.
**Indicación.** Defina

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx.$$

**P2.** **(a)** **[1.5 pts.]** Denotaremos por $dx$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Considere $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una función tal que $\dot{\varphi} \geq 0$ y tal que $\varphi(0) = 0$. Pruebe que para toda medida finita $\mu$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\int_0^\infty \varphi(x)d\mu(x) = \int_0^\infty \mu([x,\infty))\dot{\varphi}(x)dx.$$

**(b)** **[1 pto.]** Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, decimos que $A$ y $B$ son **congruentes** si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $B = T_\alpha(A)$ con

$$T_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que ser congruente es una relación de equivalencia. Note además que si $A$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^2$ y $B \subseteq \mathbb{R}^2$ congruente con $A$, entonces $B$ es medible y $\mu(A) = \mu(B)$, donde $\mu$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| \leq 1\}$. Suponga que existe una colección $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos congruentes disjuntos de pares tales que $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Muestre que $A_n$ es no medible para todo $n \in \mathbb{N}$.

**(c)** Decimos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **especial** si

$$\bigcup_{\vec{\imath}\in\mathbb{Z}^n} (E + \vec{\imath}) = \mathbb{R}^n$$

y la colección $(E + \vec{\imath})_{\vec{\imath}\in\mathbb{Z}^n}$ es disjunta de a pares.

i) **[0,5 pts.]** Muestre que $D = [0, 1)^n$ es especial.

ii) **[1 pto.]** Sea $E$ un conjunto especial y medible. Considere $E_{\vec{\imath}} = E \cap (D + \vec{\imath}) - \vec{\imath}$. Muestre que los $E_{\vec{\imath}}$ son conjuntos disjuntos y que $\bigcup_{\vec{\imath}\in\mathbb{Z}^n} E_{\vec{\imath}} = D$. Concluya que $E$ tiene medida de Lebesgue 1.

**(d)** Una medida $\nu$ en el espacio medible $((0, \infty), \mathcal{B}((0, \infty)))$ se dice **invariante bajo escala** si se cumple que $\nu(A) = \nu(\alpha A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \infty))$ y $\alpha > 0$.

Sea $\nu$ una medida en $((0, \infty), \mathcal{B}((0, \infty)))$ invariante bajo escala.

i) **[0,5 pts.]** Pruebe que si $\nu$ es finita, entonces $\nu = 0$.
**Indicación.** Estudie $\nu(\alpha^k(0, 1))$.

Suponga ahora que $\nu$ es $\sigma$-finita y no nula.

ii) **[0,5 pts.]** Pruebe que para todo $0 < a < b < \infty$ se tiene que $\nu((0, a)) = \nu((b, \infty)) = \infty$ y que $\nu([a, b]) < \infty$.

iii) **[1.0 pts.]** Suponga que $\nu \ll \lambda$, donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Suponga además que la función

$$f = \frac{\partial\nu}{\partial\lambda} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^+$$

es continua. Pruebe que existe una constante $c > 0$ tal que

$$f(x) = \frac{c}{x}$$

**Indicación.** Note que $\nu((1, t)) = \nu((\alpha, \alpha t))$.