Control 1

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $w: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función medible no negativa.

(a) [1 pto.] Pruebe que $\nu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\nu(A) = \int_A w d\mu$$

es una medida.

(b) [1 pto.] Muestre que si μ es σ -finita, entonces ν también lo es.

(c) [1 pto.] Pruebe que para toda función $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ medible y no negativa se tiene que

$$\int f d\nu = \int f w d\mu$$

y concluya que $f \in L^1(\nu)$ si y sólo si $f w \in L^1(\mu)$.

(d) [1 pto.] Muestre que si existe $1 \leq q \leq \infty$ tal que $w \in L^q$, entonces $L^p(\mu) \subseteq L^1(\nu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(e) [1 pto.] Suponga que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < c_1 < w < c_2$. Muestre que $L^p(\nu) = L^p(\mu)$ y que las normas $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ y $\|\cdot\|_{L^p(\nu)}$ son equivalentes.

(f) [1 pto.] Pruebe que

$$\left(\int |fg| w d\mu \right)^2 \leq \int |f|^2 w d\mu \int |g|^2 w d\mu.$$

P2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad (espacio de medida con $\mu(X) = 1$). Se define la medida interior $\mu_*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ asociada a μ por

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(A') \mid A' \in \mathcal{B}, A' \subseteq A\}.$$

Recuerde que la medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ asociada a μ se puede escribir

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(A') \mid A' \in \mathcal{B}, A' \supseteq A\}.$$

Suponga que $S \notin \mathcal{B}$ y sean $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{B} \cup \{S\})$, $\alpha = \mu_*(S)$ y $\beta = \mu^*(S)$. El objetivo de este problema es demostrar que para todo $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existe una medida $\nu: \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\nu|_{\mathcal{B}} = \mu$ y $\nu(S) = \gamma$. Para esto, siga el siguiente esquema:

(a) [2 pts.] Pruebe que

$$\mathcal{B}' = \{(A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S)) \mid A, B \in \mathcal{B}\}.$$

(b) [2 pts.] Pruebe el resultado suponiendo que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Indicación. Defina ν de modo que $\nu((A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S)))$ sólo dependa de γ , $\mu(A)$ y $\mu(B)$. Pruebe que ν queda bien definida, que efectivamente es una medida y que extiende a μ .

(c) [1 pto.] Muestre que existen $S^*, S_* \in \mathcal{B}$ tales que $S \subseteq S^*$, $S \supseteq S_*$, $\mu(S^*) = \mu^*(S)$ y $\mu(S_*) = \mu_*(S)$.

(d) [1 pto.] Sean $X_0 = S^* \setminus S_*$ y $S_0 = S \setminus S_*$. Pruebe que

$$\mathcal{B}' = \{A \cup E_0 \cup B \mid A, B \in \mathcal{B}, A \subseteq X \setminus S^*, B \subseteq S_*, E_0 \in \sigma(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))\},$$

defina $\mu_0 = \mu|_{\mathcal{B} \cap X_0}$ y use la parte (b) en el espacio $(X_0, \mu_0, \mathcal{B} \cap X_0)$ y el conjunto S_0 para concluir el resultado.

P3. Sea V el espacio vectorial generado por $\{\cos(kx), \sin(kx)\}_{k \geq 0} \subseteq L^2(-\pi, \pi)$. El objetivo de este problema es probar que V es denso en $\mathcal{C}_0(-\pi, \pi)$ en norma L^2 , donde $\mathcal{C}_0(-\pi, \pi)$ denota las funciones continuas a soporte compacto definidas en $(-\pi, \pi)$. A lo largo de esta pregunta, puede usar que la integral de Riemann y de Lebesgue coinciden para funciones en $\mathcal{C}_0(-\pi, \pi)$ sin necesidad de demostrarlo.

Dada $f \in \mathcal{C}_0(-\pi, \pi)$, definimos

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx$$

para $k \geq 1$ y

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Sean

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad \sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(x).$$

Desde ahora supondremos que f está extendida a todo $\mathbb{R}$ de manera 2π -periódica.

(a) [1 pts.] Pruebe que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}(t-x)\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)} f(t) dt$$

y concluya que

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}(t-x)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)} \right]^2 f(t) dt.$$

Indicación. Puede usar que

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos(ju) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}u\right)} \quad \text{y que} \quad \sum_{j=1}^k \sin((2j-1)u) = \frac{\sin^2(ku)}{\sin(u)}.$$

(b) [1 pts.] Sea

$$\phi_N(t) = \frac{1}{2N\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right]^2.$$

Demuestre que

$$\sigma_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \phi_N(t) dt$$

(c) [2 pts.] Pruebe que ϕ_N es no negativa, que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_N(t) dt = 1$ y que para todo $\delta > 0$

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \phi_N(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} \phi_N(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

(d) [2 pts.] Pruebe que $\sigma_N \rightarrow f$ uniformemente y concluya el resultado.

Indicación. Note que

$$f(x) - \sigma_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] \phi_N(t) dt.$$