Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
6 de diciembre de 2013

Auxiliar 16: Repaso C3

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Sea X un espacio métrico compacto. Se dice que una colección de conjuntos $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(X)$ **determina la convergencia débil** si para cualquier sucesión de medidas borelianas de probabilidad (μ_n) y μ medida boreliana de probabilidad se tiene que

$$\mu_n(D) \to \mu(D) \text{ para todo } D \in \mathcal{D} \text{ tal que } \mu(\partial D) = 0$$

implica que (μ_n) converge débilmente a μ.

(a) Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(X)$ una colección de conjuntos que determina la convergencia débil. Muestre que

$$\mathcal{D}^\nu = \{D \in \mathcal{D} \mid \nu(\partial D) = 0\}$$

también lo hace.

(b) Muestre que $\mathcal{D}_\nu = \{D \in \mathcal{B}(X) \mid \nu(\partial D) = 0\}$ determina la convergencia débil para cualquier medida boreliana de probabilidad ν.

P2. El objetivo de este problema es demostrar la ley fuerte de los grandes números, es decir, que si $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media 0 en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n \to 0$ c.s..

Decimos que dos secuencias de variables aleatorias $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ son **equivalentes** si se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)\}) < \infty.$$

Puede suponer conocido el siguiente resultado: si $\{X_n\}$ es una sucesión de v.a. independientes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ es convergente c.s. si y sólo si existe una sucesión $\{Y_n\}$ de v.a. independientes con $\{X_n\}$ equivalente a $\{Y_n\}$ y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n)$ son convergentes.

Sea entonces $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media 0 en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se propone el siguiente esquema

(a) Sea $E_n = \{\omega \in \Omega \mid |X_1(\omega)| \leq n\}$. Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{E_n}) < \infty.$$

Indicación: Puede ser útil que $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \leq 2k$ para $k \geq 1$.

(b) Sea $F_n = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| \leq n\}$ e $Y_n = \mathbb{1}_{F_n} X_n$. Pruebe que la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}$ es independiente y que es equivalente a $\{X_n\}$.

(c) Muestre que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(Y_n) \to 0.$$

(d) Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n) < \infty$$

y concluya el resultado.