Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de Medida
3 de diciembre del 2013

Auxiliar 15: Esperanzas Condicionales

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Nuestro objetivo es mostrar el siguiente teorema

Teorema: Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de σ-álgebras decrecientes, digamos $\mathcal{A}_n \searrow \mathcal{A}_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{A}_n$. Entonces

$$\mathbb{E}(f \mid \mathcal{A}_n) \to \mathbb{E}(f \mid \mathcal{A}_\infty)$$

En $L^1(X)$ para cualquier $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

(a) Sean $V_n = L^2(X, \mathcal{A}_n, \mu)^\perp$ y $V_* = \bigcup_{n\geq 1} V_n$. Pruebe que para $f \in \mathcal{M} := L^2(X, \mathcal{A}_\infty, \mu) + V_*$ se cumple el teorema.

(b) Sea $g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, pruebe que $g - \mathbb{E}(g \mid \mathcal{A}_n) \in V_n$.

(c) Probar que $\mathcal{M}$ es denso en $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. **Indicación:** Si no fuera denso existe una función $\phi : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathbb{R}$ lineal y continua, no nula y que verifica $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$.

(d) concluir el teorema.

(e) Ahora probaremos el teorema sin usar $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, se usará directamente $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Sean

$$U_n = \{f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \mid \mathbb{E}(f \mid \mathcal{A}_n) = 0\}$$

Pruebe que los U_n son sub espacios crecientes de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

(f) Sea $U_\infty = \{f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \mid \mathbb{E}(f \mid \mathcal{A}_\infty) = 0\}$ y $U_* = \bigcup_{n\geq 1} U_n$. Probar que U_* es denso en V_∞.

(g) Probar que $U = L^1(X, \mathcal{B}, \mu) + U_*$ es denso en L^1 y concluir el teorema.