Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
29 de octubre de 2013

Auxiliar 10: Dualidad en L^p y medida producta

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finita. Se desea probar que si (f_n) es una sucesión en L^1 tal que existe $f \in L^1$ con $\langle f_n, \mathbb{1}_A \rangle \to \langle f, \mathbb{1}_A \rangle$ para todo $A \in \mathcal{B}$, entonces (f_n) converge débilmente a f en L^1. Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Pruebe que para todo $\delta > 0$ existe una partición medible $\{X_1, \dots, X_n\}$ de X tal que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $\mu(X_i) \leq \delta$ o X_i es un átomo con $\mu(X_i) > \delta$.

(b) Suponga que $f = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, use el teorema de Baire en el espacio $(\mathcal{B}/\underset{\mu}{=}, \rho)$ para probar que existe $\delta > 0$ tal que $|\langle f_n, \mathbb{1}_A \rangle| < \varepsilon$ para todo $A \in \mathcal{B}$ con $\mu(A) \leq \delta$.
Indicación. Defina

$$F_N = \bigcap_{n \geq N} \left\{ A \in \mathcal{B} \;\middle|\; \left| \int_A f_n d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

(c) Concluya.

Nota. Recuerde que $A \underset{\mu}{=} B \iff \mu(A \triangle B) = 0$ y $\rho([A], [B]) = \mu(A \triangle B)$.

P2. **(a)** Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Muestre que para todo $A \in \sigma(\mathcal{F})$ existe una subfamilia numerable $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $A \in \sigma(\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

(b) Sean $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ espacios medibles. Muestre que para todo $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ existe una familia numerable $\{A_n \times B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \in \sigma(\{A_n \times B_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

(c) En el contexto anterior, muestre que si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $x_1 \in A_n \iff x_2 \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $E_{x_1} = E_{x_2}$. Use lo anterior para probar que el conjunto $\{E_x\}_{x\in X}$ tiene cardinalidad a lo más c.
Indicación Pruebe que para todo $y \in Y$ el conjunto

$$\mathcal{P}_y = \{M \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \;\mid\; (x_1, y) \in M \iff (x_2, y) \in M\}$$

es σ-álgebra.

(d) Concluya que si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible con $|X| > c$, entonces $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \notin \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$.

P3. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida finita y $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Muestre que

$$(\mu \otimes \nu)^*(A \times B) = \mu^*(A)\nu^*(B).$$