Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
8 de octubre de 2013

Auxiliar 4: Teoremas de convergencia, espacios L^p y medidas con signo

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida con μ no necesariamente finita y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medibles dominadas por una función integrable g. Pruebe que $f_n \to f$ c.s. si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \mathcal{B}$ con $\mu(A) \leq \varepsilon$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en A^c.

Esto muestra que si suponemos que la sucesión de funciones está dominada, entonces el resultado del teorema Egorov vale incluso si el espacio tiene medida infinita.

Indicación. Para la implicancia «hacia la derecha», suponga primero que $f_n \searrow 0$ c.s. y luego concluya el caso general.

P2. **(a)** Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y considere $1 < p < q < r \leq \infty$. Muestre que

$$L^p \cap L^r \subseteq L^q \subseteq L^p + L^r$$

y que además $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$ para toda f medible con

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

(b) Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible tal que $f \in L^q(\mu)$ y $f - 1 \in L^p(\mu)$ para $p, q \in [1, \infty)$. Pruebe que μ es finita.

P3. Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible. Una función $Q\colon X \times \mathcal{B} \to [-1, 1]$ se dice **núcleo medible** si

(I) $Q(x, \cdot)$ es una medida con signo para todo $x \in X$ y

(II) $Q(\cdot, A)$ es una función medible para todo $A \in \mathcal{B}$.

Suponga que existe un álgebra numerable $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ y sea Q un núcleo medible.

(a) Pruebe que $|Q|$, definida por $|Q|(x, A) = |Q(x, \cdot)|(A)$, es un núcleo medible.

(b) Suponga que $\sum_{x\in X} |Q|(x, A) < \infty$ para todo $A \in \mathcal{B}$. Pruebe que existe una medida finita y no negativa μ tal que $Q \ll \mu$ en el siguiente sentido: si $A \in \mathcal{B}$ verifica $\mu(A) = 0$, entonces $Q(x, A) = 0$ para todo $x \in X$.