Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
5 de octubre de 2013

Control 1

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad (espacio de medida con $\mu(X) = 1$). Se define la medida interior $\mu_* \colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$ asociada a μ por

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(A') \ \mid \ A' \in \mathcal{B}, A' \subseteq A\}.$$

Recuerde que la medida exterior $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$ asociada a μ se puede escribir

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu(A') \ \mid \ A' \in \mathcal{B}, A' \supseteq A\}.$$

Suponga que $S \notin \mathcal{B}$ y sean $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{B} \cup \{S\})$, $\alpha = \mu_*(S)$ y $\beta = \mu^*(S)$. El objetivo de este problema es demostrar que para todo $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existe una medida $\nu \colon \mathcal{B}' \to \mathbb{R}^+$ tal que $\nu|_{\mathcal{B}} = \mu$ y $\nu(S) = \gamma$. Para esto, siga el siguiente esquema:

(a) **[2 pts.]** Pruebe que
$$\mathcal{B}' = \{(A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S)) \ \mid A, B \in \mathcal{B}\}.$$

Solución: Llamemos $\mathcal{B}''$ al conjunto de la derecha. Es claro que $\mathcal{B}'' \subseteq \sigma(\mathcal{B} \cup \{S\})$, ya que los elementos de $\mathcal{B}''$ se pueden construir con finitas operaciones de intersección, complemento y unión de elementos de $\mathcal{B} \cup \{S\}$. Basta ver entonces que $\mathcal{B}''$ es σ-álgebra.

- $\varnothing \in \mathcal{B}''$ ✓
- Si $C \in \mathcal{B}''$, entonces $C = (A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S))$ y así

$$\begin{aligned} X \setminus C &= X \setminus [(A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S))] \\ &= ((X \setminus A) \cup (X \setminus S)) \cap ((X \setminus B) \cup S) \\ &= ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \cap S) \cup ((X \setminus B) \cap (X \setminus S) \cup \varnothing \\ &= ((X \setminus A) \cap S) \cup ((X \setminus B) \cap (X \setminus S)). \end{aligned}$$

  Tomando $A' = (X \setminus A)$ y $B' = (X \setminus B)$ se tiene que $X \setminus C = (A' \cap S) \cup (B' \cap (X \setminus S))$.
- Si $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}''$ es una familia numerable, entonces se tiene que

$$C_n = (A_n \cap S) \cup (B_n \cap (X \setminus S))$$

  con $A_n, B_n \in \mathcal{B}$. Luego,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap S) \cup (B_n \cap (X \setminus S)) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap S) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap (X \setminus S)) \\ &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap S \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \cap (X \setminus S) \right). \end{aligned}$$

  Como $\mathcal{B}$ es σ-álgebra, se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$, por lo que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{B}''$. Concluimos la igualdad deseada.

(b) **[2 pts.]** Pruebe el resultado suponiendo que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.
Indicación. Defina ν de modo que $\nu((A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S)))$ sólo dependa de γ, $\mu(A)$ y $\mu(B)$. Pruebe que ν queda bien definida, que efectivamente es una medida y que extiende a μ.
Solución: Definamos

$$\nu((A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S))) = \gamma\mu(A) + (1 - \gamma)\mu(B)$$

y veamos que está bien definida, es decir, que si $(A \cap S) = (A' \cap S)$ y $B \cap S = B' \cap S$ entonces

$$\nu((A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S))) = \nu((A' \cap S) \cup (B' \cap (X \setminus S))).$$

Para probar esto, basta probar que $\mu(A) = \mu(A')$ y $\mu(B) = \mu(B')$ y para esto basta probar que

$$\mu(A \triangle A') = \mu(A \setminus A') + \mu(A' \setminus A) = 0$$

y que

$$\mu(B \triangle B') = \mu(B \setminus B') + \mu(B' \setminus B) = 0.$$

En efecto, $A \setminus A', A' \setminus A \subseteq X \setminus S$, por lo que $(X \setminus (A \setminus A'))$ y $(X \setminus (A' \setminus A)) \supseteq S$. Como $\mu^*(S) = 1$, todo conjunto medible que contiene a S tiene medida 1, por lo que

$$\mu(X \setminus (A \setminus A')) = \mu(X \setminus (A' \setminus A)) = 1$$

lo que implica que $\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0$.
Se tiene además que $\mu^*(X \setminus S) = 1$, pues si $X \setminus S \subseteq C \in \mathcal{B}$ entonces $S \supseteq X \setminus C$, lo que implica que $\mu(X \setminus C) = 0$ porque $\mu_*(S) = 0$. Así, por lo ya probado se tiene que $\mu(B \setminus B') = \mu(B' \setminus B) = 0$.
Claramente $\nu(S) = \gamma\mu(X) + (1 - \gamma)\mu(\varnothing) = \gamma$. Además, si $C \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$C = (C \cap S) \cup (C \cap (X \setminus S))$$

por lo que $\nu(C) = \gamma\mu(C) + (1 - \gamma)\mu(C) = \mu(C)$. Luego, $\nu|_{\mathcal{B}} = \mu$.
Falta ver que ν es σ-aditiva:

- Claramente $\nu(\varnothing) = 0$.
- Si $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}'$ es una familia de conjuntos disjuntos, ya vimos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap S\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cap (X \setminus S)\right).$$

  con $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ y $C_n = (A_n \cap S) \cup (B_n \cap (X \setminus S))$.
  Los $A_n \cap S$ deben ser además disjuntos, pues si no lo fueran los C_n no serían disjuntos. Análogamente, los $B_n \cap (X \setminus S)$ deben ser disjuntos. Luego, si $n \neq m$ entonces $A_n \cap A_m$ está contenido en $X \setminus S$ y ya vimos que esto implica que $\mu(A_n \cap A_m) = 0$. Por otro lado, $B_n \cap B_m$ está contenido en S, por lo que también tiene medida cero. Concluimos que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \quad \text{y} \quad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n),$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) &= \gamma\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + (1-\gamma)\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \\
&= \gamma\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + (1-\gamma)\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\gamma\mu(A_n) + (1-\gamma)\mu(B_n)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n).
\end{aligned}$$

(c) **[1 pto.]** Muestre que existen $S^*, S_* \in \mathcal{B}$ tales que $S \subseteq S^*$, $S \supseteq S_*$, $\mu(S^*) = \mu^*(S)$ y $\mu(S_*) = \mu_*(S)$

Solución: Tomemos una sucesión S^n de conjuntos en $\mathcal{B}$ tales que $S^n \supseteq S$ y $\mu(S^n) \leq \mu^*(S) + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (existe por definición de ínfimo). Sea $S^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S^n \in \mathcal{B}$. Por monotonía, se verifica que $\mu(S^*) \leq \mu(S^n) \leq \mu^*(S) + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\mu(S^*) \leq \mu^*(S)$. Por otro lado, como $S^* \supseteq S$, necesariamente $\mu(S^*) \geq \mu^*(S)$ y así concluimos que $\mu(S^*) = \mu^*(S)$.

Análogamente, tomemos una sucesión S_n de conjuntos en $\mathcal{B}$ tales que $S_n \subseteq S$ y $\mu(S_n) \geq \mu_*(S) - 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (existe por definición de supremo). Sea $S_* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \in \mathcal{B}$. Por monotonía, se verifica que $\mu(S_*) \geq \mu(S_n) \geq \mu_*(S) - 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\mu(S_*) \geq \mu_*(S)$. Por otro lado, como $S_* \subseteq S$, necesariamente $\mu(S_*) \leq \mu_*(S)$ y así concluimos que $\mu(S_*) = \mu_*(S)$.

(d) **[1 pto.]** Sean $X_0 = S^* \setminus S_*$ y $S_0 = S \setminus S_*$. Pruebe que

$$\mathcal{B}' = \{A \cup E_0 \cup B \mid A, B \in \mathcal{B}, A \subseteq X \setminus S^*, B \subseteq S_*, E_0 \in \sigma(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))\},$$

defina $\mu_0 = \mu|_{\mathcal{B}\cap X_0}$ y use la parte **(b)** en el espacio $(X_0, \mu_0, \mathcal{B} \cap X_0)$ y el conjunto S_0 para concluir el resultado.

Solución: Claramente el conjunto definido arriba (que llamaremos $\mathcal{B}''$) es subconjunto de $\mathcal{B}'$, por el mismo argumento que en la parte **(a)**. Basta entonces ver que es σ-álgebra:

- $\varnothing \in \mathcal{B}''$ ✓
- Si $C = A \cup E_0 \cup B$ con $A, B \in \mathcal{B}, A \subseteq X \setminus S^*, B \subseteq S_*, E_0 \in \sigma(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))$, entonces $X \setminus C = (X \setminus A) \cap (X \setminus E_0) \cap (X \setminus B)$.
  Además,
  $$(X \setminus A) \cap (X \setminus S^*) \in \mathcal{B}, \quad (X \setminus B) \cap (X \setminus S^*) \in \mathcal{B}, \quad (X \setminus E_0) \cap (X \setminus S^*) = X \setminus S^*$$
  por lo que
  $$\begin{aligned}
  A' &= [(X \setminus A) \cap (X \setminus S^*)] \cap [(X \setminus E_0) \cap (X \setminus S^*)] \cap [(X \setminus B) \cap (X \setminus S^*)] \\
  &= (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \cap (X \setminus S^*) \in \mathcal{B}.
  \end{aligned}$$
  Análogamente,
  $$(X \setminus A) \cap S_* \in \mathcal{B}, \quad (X \setminus B) \cap S_* \in \mathcal{B}, \quad (X \setminus E_0) \cap S_* = S_*$$
  por lo que
  $$\begin{aligned}
  B' &= [(X \setminus A) \cap S_*] \cap [(X \setminus E_0) \cap S_*] \cap [(X \setminus B) \cap S_*] \\
  &= (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \cap S_* \in \mathcal{B}.
  \end{aligned}$$

y, por último, es claro que

$$E_0' = (X \setminus A) \cap (X \setminus E_0) \cap (X \setminus B) \cap X_0 \in \sigma(\{S_0\} \cap (\mathcal{B} \cap X_0)).$$

Como $(X \setminus S^*) \cup X_0 \cup X_* = X$ se tiene que

$$(X \setminus C) = [(X \setminus C) \cap (X \setminus S^*)] \cup [(X \setminus C) \cap X_0] \cup [(X \setminus C) \cap S_*] = A' \cup E_0' \cup B'$$

con $A', B' \in \mathcal{B}, A' \subseteq X \setminus S^*, B' \subseteq S_*, E_0' \in \sigma(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))$.

- Si $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}''$, entonces $C_n = A_n \cup E_n \cup B_n$ con $A_n, B_n \in \mathcal{B}$, $A_n \subseteq X \setminus S^*$, $B_n \subseteq S_*$ y $E_n \in \sigma(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))$. Se tiene que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

Tomando $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y $E_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = A \cup E_0 \cup B$ claramente verifica la definición de $\mathcal{B}''$.

Notemos que

$$\mu_0(X_0) = \mu(X_0) = \mu(S^*) - \mu(S_*) = \mu^*(S) - \mu_*(S) = \beta - \alpha.$$

Para usar la parte **(b)**, debemos verificar que $\mu_0^*(S_0) = \beta - \alpha$ y que $(\mu_0)_*(S_0) = 0$:

- Si $S' \in \mathcal{B} \cap X_0$ verifica $S' \supseteq S_0$ se tiene $S' \cup S_* \supseteq S$, por lo que $\mu(S') + \mu(S_*) \geq \beta$. Así, $\mu_0(S') = \mu(S') \geq \beta - \alpha$ y concluimos que $\mu_0^*(S_0) = \beta - \alpha$.
- Si $S' \in \mathcal{B} \cap X_0$ verifica $S' \subseteq S_0$, entonces $S' \cap S_* \subseteq S$, por lo que $\mu(S') + \mu(S_*) \leq \alpha$. Así, $\mu_0(S') = \mu(S') \leq \alpha - \alpha = 0$ y concluimos que $(\mu_0)_*(S_0) = 0$.

Por la parte **(b)**, existe $\nu_0 \cap \mathcal{B}(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))$ medida en tal que $\nu_0(S_0) = \gamma - \alpha$. Finalmente, tomamos

$$\nu(A \cup E_0 \cup B) = \mu(A) + \nu_0(E_0) + \mu(B)$$

para $A, B \in \mathcal{B}, A \subseteq X \setminus S^*, B \subseteq S_*, E_0 \in \sigma(\{S_0\} \cup (\mathcal{B} \cap X_0))$, que es claramente una medida al ser suma de medidas. Se tiene que

$$\nu(S) = \nu(\varnothing \cup (S \setminus S_*) \cup S_*) = \mu(\varnothing) + \nu_0(S \setminus S_*) + \mu(S_*) = \mu(\varnothing) + \nu_0(S_0) + \mu(S_*) = 0 + \gamma - \alpha + \alpha = \gamma$$

y

$$\nu(C) = \mu((C \cap (X \setminus S^*)) \cup (C \cap X_0) \cup (C \cap S_*)) = \mu(C \cap (X \setminus S^*)) + \mu(C \cap X_0) + \mu(C \cap S_*) = \mu(C)$$

para todo $C \in \mathcal{B}$.