

Intégration et analyse hilbertienne  
Épreuve hors classement

*durée 2 heures*

*Documents autorisés : cours photocopié et notes personnelles*

*On tiendra le plus grand compte de la clarté et de la rigueur de la copie. Les résultats du photocopié qui seront utilisés devront être cités par leur nom ou leur référence.*

*Les espaces  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  et les intervalles de  $\mathbb{R}$  seront toujours munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.*

**Exercice 1.** — Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f$  une fonction mesurable positive définie sur  $X$  vérifiant  $\int_X f(x) d\mu(x) = 1$ .

On pose  $A_n = \{x \mid 1 < f(x) < 1 + 1/n\}$ . Montrer que  $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Exercice 2.** — L'espace  $\Omega$  des suites infinies  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  de 0 et de 1 est muni de sa tribu borélienne  $\text{Bor}(\Omega)$  et de la mesure d'équiprobabilité  $P$ . On rappelle que, pour  $\alpha \in \{0, 1\}$ ,  $\beta \in \{0, 1\}$  et  $p \neq q$ , on a

$$P\left(\{\omega \mid \omega_p = \alpha \text{ et } \omega_q = \beta\}\right) = 1/4$$

On définit les fonction  $X_n$  par  $X_n(\omega) = 2\omega_n - 1$ .

(a) Montrer que les  $X_n$  forment un système orthonormal dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . Est-ce une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ ?

(b) On pose  $G_n(\omega) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} X_p(\omega)$ . Démontrer que  $\|G_n\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

(c) Démontrer que  $\|G_n\|_{L^2}$  et  $\|G_n\|_{L^1}$  restent bornés pour  $n \rightarrow \infty$ .

(d) Soit  $F$  l'espace des éléments de  $L^2(\Omega)$  qui sont orthogonaux à tous les  $X_n$ . Montrer que  $F$  est de dimension infinie.

**Exercice 3.** — On se donne deux fonctions sommables  $f$  et  $g$ , définies sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles. Pour  $t \geq 0$ , on pose

$$F(t) = \int_0^1 \sqrt{f(x)^2 + t^2 g(x)^2} dx.$$

- (a) Démontrer que  $F(t)$  est bien défini pour  $t \in [0, \infty[$ .
- (b) Démontrer que la fonction  $F$  est continue sur  $[0, \infty[$ .
- (c) Démontrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, \infty[$  et déterminer cette dérivée.
- (d) Démontrer que, à l'origine,  $F$  possède une dérivée à droite  $\lim_{t \rightarrow 0} (F(t) - F(0))/t$  et déterminer celle-ci.

**Exercice 4.** — On se donne une fonction mesurable positive définie dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant

$$K(x, y) \leq \frac{1}{1 + |x - 2y|}.$$

Pour  $\alpha > 0$ , et lorsque l'intégrale a un sens, on note  $T_\alpha$  l'opérateur qui à une (classe de) fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  fait correspondre la classe de

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y)^\alpha f(y) dy.$$

- (a) Pour  $\alpha > 0$ , montrer que  $T_\alpha$  est un opérateur linéaire continu de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .
- (b) Pour  $\alpha > 1$ , montrer que  $T_\alpha$  est un opérateur linéaire continu de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .
- (c) Pour  $\alpha > 1/2$ , montrer que  $T_\alpha$  est un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .
- (d) Pour  $\alpha > 1/2$ , montrer que  $T_\alpha$  est un opérateur linéaire continu de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .