

Corrigé de l'épreuve d'«Intégration et analyse hilbertienne»

EXERCICE 1. (a) La borne supérieure pour $h \in \mathbb{Q}$ est a priori plus petite, et il suffit donc, en posant $J_a =]-a, 0[\cup]0, a[$, de montrer que pour tout $\lambda < \Phi_a(x)$, on peut trouver un $r \in \mathbb{Q} \cap J_a$ tel que $F(x, r) = |r^{-1}(f(x+r) - f(x))| > \delta$. Par définition de la borne supérieure, il existe $h \in J_a$ tel que $F(x, h) > \delta$. Si r_n est une suite de rationnels tendant vers h , on a $F(x, r_n) \rightarrow F(x, h)$ par continuité de f , et on a donc $F(x, r_n) > \delta$ pour n assez grand.

(b) En numérotant $n \rightarrow r_n$ les rationnels de J_a , on a $\Phi_a(\cdot) = \sup_n F(\cdot, r_n)$. La fonction Φ_a est une borne supérieure dénombrable de fonctions continues et est donc borélienne.

(c) Dire que f admet une dérivée nulle en x équivaut à

$$\forall k, \exists p, \quad \Phi_{1/p}(x) \leq 1/k$$

On a donc $A = \bigcap_k \bigcup_p \{x \in \mathbb{R} \mid \Phi_{1/p}(x) \leq 1/k\}$ et A , qui est intersection dénombrable de réunions dénombrables de boréliens, est lui-même borélien.

Autre preuve : La fonction $\Phi(x) = \inf_k \Phi_{1/k}(x)$ est mesurable et $A = \Phi^{-1}(0)$ est donc borélien.

EXERCICE 2. (a) Pour toute suite t_n tendant vers un point $t_0 \in [0, \infty[$, les fonctions à intégrer $e^{-t_n x^2} f(x)$ convergent en chaque point x vers $e^{-t_0 x^2} f(x)$ et elles sont majorées en module par la fonction sommable $|f(x)|$. On a donc $F(t_n) \rightarrow F(t_0)$ en vertu du théorème de Lebesgue et F est continue en tout point t_0 .

Pour toute suite t_n tendant vers l'infini, les fonctions à intégrer sont majorées de même, et elles tendent vers 0 en tout point $x \neq 0$. On a donc $F(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

(b) Pour montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$, il suffit de montrer que, pour chaque $a > 0$, la fonction F est dérivable sur $]a, \infty[$. On applique le théorème de dérivation sous le signe somme dans un tel intervalle. La fonction $\partial/\partial t (e^{-tx^2} f(x)) = -x^2 e^{-tx^2} f(x)$ est majorée en module, indépendamment de t , par la fonction $x^2 e^{-ax^2} |f(x)|$. Cette dernière fonction est sommable car $\sup_x x^2 e^{-ax^2} < \infty$, ce qui entraîne le résultat.

(c) Pour $t > 0$, en posant $h_t(x) = e^{-tx^2}$, on a $|F(t)| \leq \|h_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$ (Cauchy-Schwarz). On a $\|h_t\|_2^2 = \int_0^\infty e^{-2tx^2} dx = t^{-1/2} \int_0^\infty e^{-2y^2} dy$ par changement de variable. On a donc $t^{1/4} |F(t)| \leq C \|f\|_2$ avec $C = (\int_0^\infty e^{-2y^2} dy)^{1/2}$.

La linéarité de T est évidente, et la relation ci-dessus peut se réécrire $\|Tf\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, ce qui exprime la continuité de T .

(d) L'intégrale double $\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} e^{-tx^2} |f(x)| dt dx$ est égale, en vertu du théorème de Fubini pour les fonctions positives, à $\int |f(x)| x^{-2} dx$, car $\int_0^\infty e^{-tx^2} dt = x^{-2}$. L'hypothèse entraîne que cette intégrale est finie.

La fonction $e^{-tx^2} f(x)$ est donc sommable du couple. D'après la seconde forme du théorème de Fubini, on a :

— la fonction $x \mapsto e^{-tx^2} f(x)$ est sommable pour presque tout t [en fait, il est ici facile de voir qu'elle est sommable pour tout $t > 0$]

— la fonction $t \mapsto \int e^{-tx^2} f(x) dx$, qui n'est autre que F , est sommable.

(e) D'après le premier théorème de Fubini, on a

$$\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2} e^{-t(x^2+y^2)} |f(x)f(y)| \, dt \, dx \, dy = \iint \frac{|f(x)f(y)|}{x^2+y^2} \, dx \, dy \leq \frac{1}{2} \left(\int \left| \frac{f(x)}{x} \right| \, dx \right)^2$$

en minorant x^2+y^2 par $2|xy|$. Cette quantité étant finie, le second théorème de Fubini assure que la fonction $F(t)^2 = \iint e^{-t(x^2+y^2)} f(x)f(y) \, dx \, dy$ est sommable sur \mathbb{R}_+ .

EXERCICE 3. (a) Nous allons travailler sur $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ (que l'on notera $d\mu(t) \, dx$). D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives, on a

$$\int_{[0,1]} V(x) \, dx = \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]} \frac{1}{|x-t|} \, dx \right\} d\mu(t) = \int_{[0,1]} +\infty \, d\mu(t) = +\infty.$$

Si la fonction V était majorée par M , on aurait $\int_{[0,1]} V(x) \, dx \leq M$, ce qui est absurde.

(b) On a, toujours en vertu du théorème de Fubini,

$$\int_a^b V(x) \, dx = \int_{[0,1]} \left\{ \int_a^b \frac{1}{|x-t|} \, dx \right\} d\mu(t).$$

La fonction entre accolades vaut $+\infty$ sur $[a, b]$. Si on avait $\mu([a, b]) > 0$, le membre de droite serait infini, alors que celui de gauche est fini.

EXERCICE 4. (a) Il est facile de montrer que G est un sous-espace vectoriel, reste à montrer qu'il est fermé. Il faut donc montrer que, si une suite g_n d'éléments de G converge vers un élément g de $L^2(Q)$, alors $g \in G$.

On sait qu'il existe alors une sous-suite (nous la noterons h_n) qui converge vers g presque partout. Cela signifie (en notant φ_n les fonctions définies sur $J = [0, 1]$ associées aux h_n) que les représentants $(x, y) \mapsto \varphi_n(x)$ convergent presque partout vers n'importe quel représentant de g . On définit donc un représentant \tilde{g} de g en posant $\tilde{g}(x, y) = \lim \varphi_n(x)$ si la limite existe et 0 sinon, et il est clair que $\tilde{g}(x, y)$ est de la forme $\varphi(x)$.

(b) Soit $f \in L^2(Q)$. Le théorème de Fubini, appliqué à $|f|^2$, nous assure que la fonction $h(x) = \int |f(x, y)|^2 \, dy$ est définie presque partout et est sommable. On posera $k(x) = h(x)^{1/2}$. On a $k \in L^2(J)$ et, presque partout, $k(x) = \|f(x, \cdot)\|_{L^2(J)}$.

Posons $\varphi(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy$. On a presque partout, d'après Cauchy-Schwarz, $|\varphi(x)| \leq \|f(x, \cdot)\|_{L^2(J)} \|1\|_{L^2(J)} = k(x)$. La fonction φ est donc de carré sommable sur J et la fonction $g(x, y) = \varphi(x)$ appartient à G .

Montrons que g est bien la projection orthogonale de f en montrant que, pour tout élément h de G (on notera ψ la fonction de $L^2(J)$ associée), on a $(f-g) \perp h$:

$$(h | f - g) = \iint \overline{\psi(x)} (f(x, y) - \varphi(x)) \, dx \, dy,$$

la fonction sous le signe \iint est sommable, on peut intégrer d'abord en y et ce produit scalaire vaut donc $\int 0 \, dx = 0$, d'où le résultat.
