

## Control Teoría de la Medida

19 de Noviembre del 2002

Alejandro Maass

Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio de probabilidad (i.e. un espacio de medida donde  $\mu(X) = 1$ ). Sea  $T : X \rightarrow X$  una función invertible  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  medible tal que  $T\mu = \mu$  (recordar que  $T\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$  para  $A \in \mathcal{B}$ ). Considere  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en  $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

**P1.**— Probar que  $\forall A \in \mathcal{B}$ ,  $\int_A f \circ T d\mu = \int_{T(A)} f d\mu$ .

**P2.**— Sea  $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0\}$ . Probar que  $\mathcal{I}$  es  $\sigma$ -álgebra

Para  $N \geq 1$  definimos  $f_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n$  y  $f^{(N)} = \sup_{1 \leq j \leq N} j \cdot f_j$ . Además  $f^* = \sup_{N \geq 1} f^{(N)}$ .

**P3.**— Probar que  $\int_{\{f^* > 0\}} f d\mu \geq 0$ .

*Indicación:* probar que  $f^{(N)} \leq f + (f^{(N)})^+ \circ T$  y que  $\int_{\{f^{(N)} > 0\}} f d\mu \geq 0$ .

**P4.**— Sea  $Y \in \mathcal{B}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $T(Y) \subseteq Y$ . Probar que

$$\int_{\{y \in Y : f^*(y) > \alpha\}} f d\mu \geq \alpha \mu\{y \in Y : f^*(y) > \alpha\}$$

**P5.**— Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$ . Se define

$$E_{\alpha, \beta} = \{x \in X : \liminf_{N \rightarrow \infty} f_N(x) \leq \alpha < \beta \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} f_N(x)\}$$

(i) Probar que  $T(E_{\alpha, \beta}) \subseteq E_{\alpha, \beta}$ .

(ii) Probar que  $\mu(E_{\alpha, \beta}) = 0$  y concluir que  $\bar{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N$  existe  $\mu$ -c.s.

**P6.**— Probar  $\bar{f} = \bar{f} \circ T$   $\mu$ -c.s. y que  $\bar{f}$  es  $\mathcal{I} - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  medible.

**P7.**— Probar que  $\bar{f} \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$  y  $\|\bar{f}\|_1 \leq \|f\|_1$ .

**P8.**— Pruebe que  $f_N$  converge a  $\bar{f}$  en  $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

*Indicación:* pruébelo primero para  $f \geq 0$  y para ello considere  $0 \leq g \leq f$  acotada.

**P9.**— Probar que si  $\mathcal{I}$  sólo contiene conjuntos de medida 0 o 1 entonces  $\bar{f} = \int_X f d\mu$   $\mu$ -c.s.