

## Tarea 2 Teoría de la Medida (complementos)

Abril 2003  
Alejandro Maass

**P1.**— Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio de probabilidad (i.e. un espacio de medida donde  $\mu(X) = 1$ ). Sea  $T : X \rightarrow X$  una función invertible  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  medible tal que  $T\mu = \mu$  (recordar que  $T\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$  para  $A \in \mathcal{B}$ ). Considere  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

- (a) Probar que  $\forall A \in \mathcal{B}, \int_A f \circ T d\mu = \int_{T(A)} f d\mu$ .  
 (b) Sea  $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0\}$ . Probar que  $\mathcal{I}$  es  $\sigma$ -álgebra

**P2.**— Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ . El diámetro de  $A$ ,  $d(A)$ , se define como

$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Observe que  $d(A) = d(\bar{A})$ ,  $d(\emptyset) = 0$ . También recordamos que

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$$

es la distancia entre  $A$  y  $B$ .

Se denota por  $R_\epsilon(A)$  al conjunto de recubrimientos  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $A$  tales que  $d(B_k) \leq \epsilon$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Se define  $\Lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  como  $\Lambda(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda_\epsilon(A)$  donde

$$\Lambda_\epsilon(A) = \inf\left\{\sum_{k \in \mathbb{N}} d(B_k) : (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in R_\epsilon(A)\right\}.$$

Muestre que  $\Lambda$  está bien definida y que

$$A \subseteq B \Rightarrow \emptyset \neq R_\epsilon(\mathbb{R}^2) \subseteq R_\epsilon(B) \subseteq R_\epsilon(A).$$

(A) Pruebe que  $\Lambda$  es una medida exterior. (B) Pruebe que  $\Lambda$  satisface las siguientes propiedades:

- (B.1)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^2, \text{dist}(A, B) > 0 \Rightarrow \Lambda(A \cup B) = \Lambda(A) + \Lambda(B)$ ;  
 (B.2)  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \Lambda(A + x) = \Lambda(A)$ , donde  $A + x = \{a + x : a \in A\}$ ;  
 (B.3)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \Lambda(\alpha A) = |\alpha| \Lambda(A)$ , donde  $\Lambda(\alpha A) = \{\alpha a : a \in A\}$ , y  $\Lambda(\{0\}) = 0$ ;  
 (B.4) Si  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una contracción, es decir,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, |\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y|,$$

entonces  $\Lambda(\psi(A)) \leq \Lambda(A)$ ;

(B5) Deduzca de (B.1) que todo Boreliano de  $\mathbb{R}^2$  es  $\Lambda$ -medible y de (B.4) que  $\Lambda$  es invariante por rotaciones;

(B.6) Pruebe que  $\Lambda$  induce una medida en los Borelianos de  $\mathbb{R}^2$ , que seguimos llamando  $\Lambda$ ;

(C) Demuestre que si  $D = [a, b] \times \{0\}$  entonces  $\Lambda(D) = b - a$  y concluya que para todo trazo recto  $H(x, y) = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$  se tiene  $\Lambda(H(x, y)) = |x - y|$ . Pruebe además que si  $C = [0, 1] \times [0, 1]$ , entonces  $\Lambda(C) = \infty$  y deduzca que  $\Lambda(A) = \infty$  para cualquier  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ .

(D) Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva continua simple (i.e.  $\gamma$  inyectiva). El propósito de esta parte es probar que  $\Lambda(C) = \ell(\gamma)$  donde  $\ell(\gamma)$  es el largo de la curva  $C = \gamma([0, 1])$ .

En lo que sigue las curvas son de largo finito. La parametrización natural  $\psi : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es tal que  $\ell(\psi([0, t])) = t$ . De aquí se deduce que  $\psi$  verifica  $|\psi(s) - \psi(t)| \leq |s - t|$  para  $s, t \in [0, \ell(\gamma)]$ .

(D.1) Pruebe que  $\Lambda(C) = \Lambda(\psi([0, \ell(\gamma)])) \leq \Lambda([0, \ell(\gamma)]) = \ell(\gamma)$ , donde hemos identificado  $[0, \ell(\gamma)]$  con  $[0, \ell(\gamma)] \times \{0\}$ ;

(D.2) Sea  $\mathcal{P}$  una partición finita de  $[0, 1]$  definida por los puntos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ . Considere la poligonal que pasa por los puntos  $\gamma(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Pruebe que la proyección del pedazo de curva  $\gamma[t_i, t_{i+1}]$  sobre la recta que pasa por  $\gamma(t_i)$  y  $\gamma(t_{i+1})$  contiene al trazo  $H_i = H(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ ; Pruebe que

$$\Lambda(H_i) \leq \Lambda(\gamma[t_i, t_{i+1}])$$

y concluya que  $\ell(\gamma) \leq \Lambda(\mathcal{C})$ .