

## EXAMEN RECUPERATIVO

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

**Pregunta 1 :** Sea  $M = \{\mu : \mu \text{ es medida con signo sobre } (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ y } |\mu|(\mathbb{R}) < \infty\}$ , donde  $|\mu|$  es la variación de  $\mu$ .  $M$  es un espacio de Banach con la norma  $\|\mu\| := |\mu|(\mathbb{R})$ . Para  $\mu, \lambda \in M$  definiremos su convolución  $\mu * \lambda$  como

$$(\mu * \lambda)(A) = (\mu \otimes \lambda)(A_2)$$

para todo  $A \in \mathcal{B}$  y donde  $A_2 := \{(x, y) : x + y \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ .

(a) Demuestre la fórmula

$$(\mu * \lambda)(A) = \int \mu(A - t) d\lambda(t)$$

$\forall \mu, \lambda \in M, \forall A \in \mathcal{B}$ . (Aquí  $A - t = \{x - t : x \in A\}$ )

Recuerde que para medidas con signo  $|\int f(x) d\mu(x)| \leq \int |f(x)| d|\mu|(x)$ .

(b) Demostrar que  $\mu * \lambda \in M$  y que  $\|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\| \|\lambda\|$ .

(c) Demostrar que  $\mu * \lambda$  es la única medida  $\nu \in M$  tal que

$$\int f d\nu = \int \int f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y)$$

para toda función  $f \in C_0(\mathbb{R})$

(d) Se dice que una medida con signo  $\mu$  es discreta si está concentrada en un conjunto numerable; se dice que  $\mu$  es continua si  $\mu(\{x\}) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sea  $m$  la medida de Lebesgue en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  (Observe que  $m$  no pertenece a  $M$ ). Demuestre las siguientes proposiciones para  $\mu, \lambda \in M$

- (i) Si  $\mu$  y  $\lambda$  son discretas, entonces  $\mu * \lambda$  es discreta.
- (ii) Si  $\mu$  es continua, entonces  $\mu * \lambda$  es continua.
- (iii) Si  $\mu \ll m$ , entonces  $\mu * \lambda \ll m$

(e) Suponga que  $d\mu = f dm$  y  $d\lambda = g dm$ , con  $f, g \in L^1(m, \mathbb{R})$ , demuestre que  $d(\mu * \lambda) = (f * g) dm$

pregunta 2 :

- (i) Considere  $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$  un espacio de Probabilidades. Sea  $A = \{X \in L^2(IP) : E(X^2) \leq 1\}$  la bola unitaria de  $L^2$ . Pruebe que este conjunto es Uniformemente Integrable es decir

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{X \in A} \int_{|X| > a} |X| dIP = 0.$$

- (ii) Supongamos que  $f$  es una función absolutamente continua en  $[0, 1]$ . Además supongamos que  $g$  es una función Lipschitz es decir existe una constante  $K < \infty$  tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|.$$

Pruebe que la composición  $g \circ f$  es absolutamente continua.

**NOTA** La pregunta 1 vale 60% y la 2 40%.