

Intégration et analyse hilbertienne
Épreuve hors classement
durée 2 heures

Documents autorisés : cours polycopié et notes personnelles.

Exercice 1. — Soit f une fonction continue définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles. Pour $a > 0$, on définit la fonction Φ_a de \mathbb{R} dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par

$$\Phi_a(x) = \sup_{0 < |h| < a} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$$

- a.** — Montrer que $\Phi_a(x)$ est égal à la borne supérieure de la même expression pour $h \in \mathbb{Q}$ vérifiant $0 < |h| < a$.
- b.** — \mathbb{R} étant muni de sa tribu borélienne, montrer que les fonctions Φ_a sont mesurables.
- c.** — On note A l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que f soit dérivable en x et que $f'(x) = 0$. Montrer que A est borélien.

Exercice 2. — On se donne une fonction mesurable f définie sur \mathbb{R} (muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue) à valeurs complexes. Pour $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} f(x) dx$$

lorsque l'intégrale est définie.

- a.** — On suppose $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$.
- b.** — On suppose $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$.
- c.** — On suppose $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{1/4}F(t)$ est bornée sur $]0, \infty[$.
Montrer que l'application T , qui à f fait correspondre (la classe de) la fonction $t \mapsto t^{1/4}F(t)$, est une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$.
- d.** — On suppose que l'application $x \mapsto x^{-2}f(x)$ est sommable. Montrer que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.
- e.** — On suppose que l'application $x \mapsto x^{-1}f(x)$ est sommable. Montrer que $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3. — Soit μ une mesure non nulle de masse totale finie, définie sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne. Pour $x \in [0, 1]$, on définit $V(x) \in \overline{\mathbb{R}_+}$ par

$$V(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{|x-t|} d\mu(t)$$

en convenant que $1/|x-t|$ vaut $+\infty$ pour $x=t$.

a. — Calculer $\int_0^1 V(x) dx$ et en déduire que la fonction V n'est pas bornée par un élément de \mathbb{R}_+ .

b. — On se donne a et b tels que $0 \leq a < b \leq 1$ et on suppose que la fonction V est bornée sur $[a, b]$ par un élément de \mathbb{R}_+ . Montrer que $\mu([a, b]) = 0$.

[N.B. La mesure μ modélise une répartition quelconque de charges positives portées par un segment de l'espace tridimensionnel, et $V(x)$ est alors (au facteur $4\pi\epsilon_0$ près) la valeur du potentiel électrostatique en un point de ce segment.]

Exercice 4. — L'intervalle $[0, 1]$ et le carré $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ seront munis de leurs tribus boréliennes et de leurs mesures de Lebesgue respectives. On dira qu'un élément $g \in L^2(Q)$ "ne dépend pas de y " s'il existe une fonction φ définie et mesurable sur $[0, 1]$ telle que l'application

$$(x, y) \longmapsto \varphi(x)$$

soit un représentant de g .

a. — Soit G l'ensemble des éléments de $L^2(Q)$ qui "ne dépendent pas de y ". Montrer que G est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(Q)$.

b. — Pour $f \in L^2(Q)$, déterminer la projection orthogonale de f sur G .
