

Control 2 Análisis II

Prof. J. San Martín, Aux. F. Schwartz

- 1) Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida completo. Para  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  considere

$$E(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} / 0 \leq y < f(x)\}$$

$$H(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} / 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- (i) Muestre que si  $f_n \uparrow f$  entonces  $E(f_n) \uparrow E(f)$ .  
 (ii) Muestre que si  $f$  es simple positiva entonces  $E(f), H(f)$  pertenecen a  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$  donde  $\mathcal{B}$  son los borelianos de  $\mathbb{R}$ .  
 Concluya que si  $f \geq 0$  es medible, entonces  $E(f) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ .  
 (iii) Para  $f \geq 0$ , simple, pruebe que

$$\mu \otimes \lambda(E(f)) = \int f d\mu$$

Extienda esta igualdad para  $f \geq 0$  medible.

- (iv) Utilizando el teorema de Tonelli pruebe que para toda  $f \geq 0$  medible

$$\mu \otimes \lambda(H(f)) = \int f d\mu$$

Concluya que  $\mu \otimes \lambda(\{(x, y) \in X \times \mathbb{R}_+ / y = f(x)\}) = 0$ .

2. Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida completo con  $\mu(\Omega) = 1$ . Consideremos  $G \subseteq \mathcal{F}$  una sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Para  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$   $\mathcal{F}$ -medible y de cuadrado integrable consideremos la medida definida en  $G$

$$\forall A \in G \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$$

- (i) Pruebe que  $\nu$  es una medida finita y que  $\nu \ll \mu$ . Pruebe que existe  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  única  $\mu$ -c.t.p y  $G$ -medible tal que  $\nu(A) = \int_A g d\mu$ , es decir  $\forall A \in G \quad \int_A g d\mu = \int_A f d\mu$ . Notar que  $g$  no necesariamente es igual a  $f$ . Para ello estudie el caso donde  $G = \{\emptyset, \Omega\}$  es la  $\sigma$ -álgebra trivial. Cuanto vale  $g$  en este caso?

- (ii) Si  $h \in L^2(G, d\mu)$  es simple pruebe que

$$\int f h d\mu = \int g h d\mu \text{ y que } \left| \int g h d\mu \right| \leq \|f\|_2 \cdot \|h\|_2,$$

de donde concluya que  $g$  es de cuadrado integrable y que  $\|g\|_2 \leq \|f\|_2$ .  
Indicación piense en  $(L^2(G, d\mu))^*$ .

(iii) Demuestre que

- $f$  es  $G$ -medible ssi  $f = g$ .
- Sean  $f_1, f_2 \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$  y  $g_1, g_2$  las funciones  $G$ -medibles asociadas. Pruebe que a  $f_1 + f_2$  le corresponde  $g_1 + g_2$ .

3. Consideremos  $V = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \mid a_m, b_m \in \mathbb{R}, a_m = b_m = 0 \forall m \geq m_0 \right\}$  el espacio vectorial generado por las funciones  $\{1, \cos mx, \sin mx, m \geq 1\}$ . Probaremos que  $V$  es denso en  $L^2((-\pi, \pi), dx)$ .

I Pruebe que si  $V$  es denso en  $C_0((-\pi, \pi))$  entonces  $V$  es denso en  $L^2$ .

II Considere  $f \in C_0(-\pi, \pi)$  y definamos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

para  $m \geq 1$ , y

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Definimos  $S_k(x) = \sum_{m=0}^k a_m \cos mx + b_m \sin mx$  y  $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}$ . En lo que sigue supondremos que  $f$  está extendida a todo  $\mathbb{R}$  de manera  $2\pi$  periódica, es decir  $\forall x, f(x+2\pi) = f(x)$ .

(i) Pruebe que

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)(t-x)\right)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt$$

y concluya que

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin\left(\frac{n(t-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \right)^2 f(t) dt$$

Indicación:

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos mu = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$\sin u + \sin 3u + \dots + \sin(2m-1)u = \frac{(\sin(mu))^2}{\sin(u)}$$

(ii) Definamos  $\phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi} \left( \frac{\sin(n\frac{z}{2})}{\sin(\frac{z}{2})} \right)^2$ , así demuestre que

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\phi_n(z)dz.$$

(iii) Pruebe que  $\phi_n \geq 0$ ;  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z)dz = 1$ ; y que  $\forall \delta > 0$  suficientemente pequeño

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \phi_n(z)dz = \int_{\delta}^{\pi} \phi_n(z)dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(iv) Pruebe que  $\sigma_n \rightarrow f$  uniformemente, para ello note que

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+z))\phi_n(z)dz$$

y separe esta integral en tres partes  $(-\pi, -\delta]$ ,  $(-\delta, \delta)$  y  $[\delta, \pi)$ .

(v) De (iv) concluya que  $\sigma_n \xrightarrow{L^2} f$ , y pruebe que  $V$  es denso en  $L^2$ .