

# MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 1

JAIME SAN MARTÍN, CRISTÓBAL GUZMÁN, JULIO BACKHOFF  
26 DE ABRIL DE 2009

**P1.** Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  espacio completo de medida finita. Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\mu(X) = 1$ . Se define la convergencia en **medida**, en el conjunto de las funciones medibles, como

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = 0.$$

- En  $L^0$ , espacio vectorial de clases de funciones medibles a valores reales con la equivalencia  $\mu$ -c.t.p., se define

$$d(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

Muestre que  $d$  es una distancia y que metriza la convergencia en medida.

Le puede servir notar que  $\mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\} = \int_{|f_n - f| \geq \epsilon} \mu$ .

- Pruebe que la convergencia  $\mu$ -c.t.p. implica la convergencia en medida. Recíprocamente pruebe que la convergencia de  $(f_n)$  a  $f$  en medida implica la convergencia  $\mu$ -c.t.p. de una subsucesión. De un ejemplo para el que la secuencia completa no converja  $\mu$ -c.t.p.. Concluya que la convergencia  $\mu$ -c.t.p. no es metrizable.
- Muestre que la convergencia de  $(f_n)$  a  $f$   $\mu$ -c.t.p. es equivalente a la convergencia a 0, en medida, para  $\sup_{k \geq n} |f_k - f|$  es decir

$$\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x : \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = 0.$$

**P2.** Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$  la medida de Lebesgue.

- Pruebe que si  $\mu(A) > 0$  existe un intervalo acotado  $I = (a, b)$  tal que  $h = b - a > 0$  y

$$\mu(A \cap (a, b)) > \frac{3}{4}h.$$

Le puede servir usar la caracterización de  $\mu(A)$  usando el teorema de Caratheodory.

- Muestre que si  $0 < x < h/2$  entonces  $E \cup (E + x) \subset (a, b + h/2)$ , con  $E = A \cap (a, b)$ . Por otro lado si  $E$  y  $E + x$  son disjuntos pruebe que  $\mu(E \cup (E + x)) > \frac{3}{2}h$  lo que es una contradicción. Concluya que  $E - E = \{z = u - v : u, v \in E\}$  contiene al intervalo  $(-h/2, h/2)$  y lo mismo sucede con  $A - A$ .
- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva, es decir

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Muestre que  $\forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$  se tiene  $f(qx) = qf(x)$ . Para ello muestre primero que  $f(0) = 0$ , luego que la propiedad es cierta para  $q \in \mathbb{N}$ , luego para  $q \in \mathbb{Z}$  y finalmente para  $q \in \mathbb{Q}$ .

Suponga que  $A$  es un conjunto medible, de medida positiva y que  $f$  es acotada en  $A$ , es decir

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in A\} < \infty.$$

Pruebe que hay un intervalo  $J = (-h/2, h/2)$  tal que  $h > 0$  y

$$\forall x \in J \quad |f(x)| \leq 2M.$$

- Suponga que hay una secuencia  $s_n \rightarrow 0$  tal que  $f(s_n) \rightarrow a > 0$ . Pruebe que necesariamente  $f$  no es acotada en  $J$ . Concluya que  $f$  es continua en 0 y por la aditividad,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Finalmente demuestre que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se tiene  $f(x) = xf(1)$ .

**TIEMPO 3 hrs.**

---

**SOLO LOS MAS CURIOSOS, PARA LA CASA.** Construya una función aditiva que no sea continua.