

MA48C Medida e Integración. Semestre 2009-01

Profesor: Jaime San Martín Auxiliares: Julio Backhoff, Cristóbal Guzmán y Omar Larré

Ejercicios Semana 1

21 de Marzo de 2009

P1.- (*Ejercicios cortos*)

1. Sea \mathcal{A} un álgebra y μ una medida definida sobre ella. Si $A, B \in \mathcal{A}$, pruebe que $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$. ¿Es cierta la desigualdad si μ es una medida exterior?
2. Sean X un cjo., $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra, $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ y $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ una medida finita. Pruebe que para todo $A \in \mathcal{T}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A \Delta A_\epsilon) \leq \epsilon$.
3. Sean A_1, \dots, A_n conjuntos medibles y $r \in \mathbb{N}$ tales que para todo $x \in [0, 1]$, x pertenece al menos a r de estos conjuntos. Pruebe que al menos uno de los A_i tiene medida de Lebesgue mayor o igual a r/n .
4. Sea A un boreliano de $\bar{\mathbb{R}}$. Pruebe que A tiene medida de Lebesgue nula ssi para todo $\epsilon > 0$ existen $\{(c_k, d_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ intervalos abiertos disjuntos tales que $A \subseteq \bigcup (c_k, d_k)$ y $\sum_n (d_k - c_k) < \epsilon$.

P2.- (*Medidas difusas, atómicas y no atómicas*)**Definición 0.1.** Sea (X, \mathcal{T}, μ) espacio de medida tal que los singletons son medibles.

- Se dice que μ es difusa si $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.
 - $x_0 \in X$ se dice masa puntual si $\mu(\{x_0\}) > 0$.
- a) Sea Suponga (X, \mathcal{T}, μ) espacio de medida σ -finita tal que los singletons son medibles. Pruebe que μ se descompone como la suma de una medida difusa y una cantidad a lo más numerable de masas puntuales.

Hint: Recuerde que una suma arbitraria de números positivos que es convergente, posee a lo más una cantidad numerable de términos no nulos.

Definición 0.2. Sea (X, \mathcal{B}, ν) espacio de medida. Un conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) > 0$ se llama átomo si para todo $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\mu(B) = 0 \quad \vee \quad \mu(A \setminus B) = 0.$$

Si μ no tiene átomos se dirá no atómica.

Sea entonces (X, \mathcal{B}, ν) espacio de medida.

- b) Pruebe que si no existen átomos para μ , entonces μ es difusa.

- c) Sea $A \in \mathcal{B}$ con $0 < \mu(A) < +\infty$. Suponiendo que μ es una medida no atómica sobre $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}(A)$, entonces A contiene subconjuntos de medida arbitrariamente pequeña.
- d) Pruebe que si A y B son 2 átomos, entonces $\mu(A \cap B) = 0$ o $\mu(A \Delta B) = 0$.

Definición 0.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Dos clases $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ se dicen independientes si $\forall A \in \mathcal{C}_1$ y $B \in \mathcal{C}_2$ se tiene

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Esto se denotará $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$.

Si ahora $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia arbitraria de partes de Ω . Se dirá que las colecciones son independientes si para todo $I \subseteq \Lambda$, I finito, $A_i \in \mathcal{F}_i$ $i \in I$, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

P3.- Pruebe que si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son clases independientes, y además son cerradas para la intersección, entonces $\sigma(\mathcal{C}_1)$ y $\sigma(\mathcal{C}_2)$ son σ -álgebras independientes.

Hint: Use el π - λ teorema (páginas 7 y 8 del apunte).

P4.- (Ley 0-1 de Kolmogorov)

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ esp. de probb. y $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ σ -álgebras independientes. Sea $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{k \geq n} \mathcal{B}_k\right)$. El objetivo es probar que

$$\forall A \in \mathcal{A}_\infty \quad \mathbb{P}(A) = 0 \vee \mathbb{P}(A) = 1.$$

Para esto se pide

- Probar que $\mathcal{S} = \left\{ \bigcap_{j \in J} A_j : J \subset \mathbb{N} \text{ finito}, A_j \in \mathcal{B}_j \right\}$ es semiálgebra.
- Probar que $\sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n\right) = \sigma(\mathcal{S})$.
- Si se definen $\Sigma_n^\infty = \sigma\left(\bigcup_{k \geq n} \mathcal{B}_k\right)$ y $\Sigma_0^n = \sigma\left(\bigcup_{k < n} \mathcal{B}_k\right)$. Pruebe que $\Sigma_n^\infty \perp \Sigma_0^n$.
- Pruebe que $\mathcal{A}_\infty \perp \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_0^n$ y que $\mathcal{A}_\infty \perp \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_0^n\right)$.
- Pruebe que $\mathcal{A}_\infty \perp \mathcal{A}_\infty$ y concluya.

P5.- (Recíproca del Lema de Borel-Cantelli)

Sea (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. En clase auxiliar se probó el Lema de Borel-Cantelli:

Lema 0.1. (*Borel-Cantelli*)

Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles. Entonces

$$\sum_n \mu(A_n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup_n A_n) = 0$$

El objetivo de este problema es probar una suerte de recíproca, bajo la hipótesis adicional

Las clases $\mathcal{A}_n = \{A_n\}$ $n \geq 1$ son independientes.

Para ésto pruebe que:

- a) Las clases $\mathcal{B}_n = \{A_n, A_n^c\}$, con $n \in \mathbb{N}$ son independientes.
- b) Pruebe la implicancia

$$\sum_n \mu(A_n) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup_n A_n) = 1$$

Hint Pruebe que $\mu(\liminf_n A_n^c) = 0$, para lo cual puede ser útil la siguiente desigualdad:

Para una familia finita de números $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$ se tiene que $\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \leq e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$.

P6.- Sea X espacio métrico y $\epsilon > 0$. Para $A \subseteq X$ se define $\mu_\epsilon^*(A) = \min\{|I| : A \subseteq \bigcup_{i \in I} B(x_i, \epsilon)\}$.

- a) Probar que μ_ϵ^* es medida exterior.
- b) Si se define $\mu(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon^*(A)$. Encontrar explícitamente $\mu(A)$ y probar que μ es una medida.