

Intégration et analyse hilbertienne
Épreuve hors classement

durée 2 heures

Documents autorisés : cours photocopié et notes personnelles

Sauf indication contraire, les fonctions considérées sont à valeurs complexes. L'espace \mathbb{R} et ses intervalles seront toujours munis de leur tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 1 On munit l'espace $L^1([-1, 1])$ de sa norme :

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)| dt.$$

On note $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Pour $f \in L^1([-1, 1])$, on définit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$F(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + |xt|} f(t) dt.$$

- 1) Montrer que F est bien définie et paire.
- 2) Montrer que F appartient à $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ et que $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.
- 3) Montrer que la restriction de F à $[0, +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et que cette dérivée est continue sur $[0, +\infty[$.
- 4) Montrer que si f est ≥ 0 et non nulle dans $L^1([-1, 1])$, alors F n'est pas dérivable en 0.
- 5) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} tout entier si et seulement si

$$\int_{-1}^1 |t| f(t) dt = 0.$$

- 6) Montrer que si F est dérivable sur \mathbb{R} tout entier, alors la dérivée seconde F'' existe partout et qu'elle est elle-même continue.
- 7) Montrer que l'application $f \mapsto F$ définit une application linéaire continue de $L^1([-1, 1])$ dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ que l'on notera T . Calculer la norme $\|T\| = \sup\{\|T(f)\|_\infty \mid \|f\|_1 \leq 1\}$.

Exercice 2. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On suppose que $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ est une suite de fonctions mesurables qui tend presque partout vers la fonction mesurable $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

- 1) On suppose que $\mu(X)$ est fini. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > t\}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On considérera la suite de sous-ensembles

$$A_{n,t} = \{x \in X \mid \sup_{p \geq n} |f_p(x) - f(x)| > t\}.$$

- 2) Trouver une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $f_n(x) \rightarrow 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- la mesure de Lebesgue de $\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > t\}$ soit $+\infty$, pour tout réel t et tout entier n .

Dans la suite de cet exercice, on supposera que $\mu(X)$ est fini et que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n|^2 d\mu$ est fini. On posera $M^2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n|^2 d\mu$.

3) Montrer que $\int_X |f|^2 d\mu \leq M^2$. (Indication : Utiliser le lemme de Fatou.)

4) Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_A |f - f_n| d\mu \leq 2M \sqrt{\mu(A)}.$$

5) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Exercice 3. On considère $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la mesure d'équiprobabilité P . On notera par $\|\cdot\|_2$, la norme sur $L^2(\Omega)$ et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. On rappelle que si A est un sous-ensemble on note par $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de A . Si $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$, on note par $C_{(s_1, \dots, s_n)}$ le sous-ensemble de Ω :

$$C_{(s_1, \dots, s_n)} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\ell, \dots) \in \Omega \mid \omega_1 = s_1, \omega_2 = s_2, \dots, \omega_n = s_n\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on posera aussi :

$$D^n = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\ell, \dots) \in \Omega \mid \omega_n = 1\}.$$

On rappelle que $P(D^n) = \frac{1}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une suite de fonctions mesurables $\varphi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_0 = \mathbf{1}$, la fonction constante égale à 1 partout sur Ω , et pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\varphi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\ell, \dots) = \omega_n.$$

On observera que $\varphi_n = \mathbf{1}_{D^n}$, pour $n \geq 1$.

- 1) Montrer que $\int_\Omega \varphi_n dP = \frac{1}{2}$, pour $n \geq 1$. Que vaut $\|\varphi_n\|_2$?
- 2) Montrer que pour tout $m, n \geq 1$, avec $m \neq n$, on a $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \frac{1}{4}$.

Dans la suite on pose $\psi_0 = \varphi_0$ et $\psi_n = 2\varphi_n - 1$, pour $n \geq 1$.

- 3) Montrer que $\|\psi_n\|_2 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que les ψ_n sont 2 à 2 orthogonaux.

Dans la suite, on note par V le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par les $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$ et par F sa fermeture. On remarquera que le sous-espace F admet la suite $\psi_n, n \in \mathbb{N}$ pour base hilbertienne, en particulier, tout $x \in F$ s'écrit $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(x) \psi_n$, avec $c_n(x) = \langle \psi_n, x \rangle$.

On posera dans la suite $\theta_n = \max(\varphi_1, \dots, \varphi_n), n \geq 1$.

- 4) Montrer $\int_\Omega \theta_n dP = 1 - 2^{-n}$. (Indication : $1 - \theta_n$ est la fonction caractéristique d'un ensemble que l'on déterminera). Montrer que $\theta_n \rightarrow \varphi_0 = \mathbf{1}$ dans $L^2(\Omega)$.

- 5) Montrer que $\langle \theta_n, \varphi_i \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$, si $i > n$ et que $\langle \theta_n, \varphi_i \rangle = \frac{1}{2}$, pour $i = 1, \dots, n$.

On appelle $p : L^2(\Omega) \rightarrow F$ la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur son sous-espace F .

- 6) Montrer que :

$$p(\theta_n) = (1 - \frac{1}{2^n})\psi_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^n} \psi_i.$$

- 7) Pour quelle valeur de n a-t-on $\theta_n \in F$? (Indication : On utilisera la relation de Bessel-Parseval pour $p(\theta_n)$ dans la base hilbertienne ψ_n .)