

CONTROL 3

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

Pregunta 1 : Pruebe que existe una única medida de Probabilidad IP en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}^{\mathbb{R}_+})$ cuyas leyes finito dimensionales son puramente atómicas y verifican: $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$\mu_{t_1 t_2 \dots t_n}(\{(m_1, m_2, \dots, m_n)\}) = \prod_{i=1}^n e^{-(t_i - t_{i-1})} \frac{(t_i - t_{i-1})^{m_i - m_{i-1}}}{(m_i - m_{i-1})!},$$

donde $m_0 = 0 = t_0$, y $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ son enteros no negativos. Por convención supondremos que $0^0 = 1$. Denotemos por \mathcal{S}^n el conjunto de n-tuplas enteras no negativas \vec{m} que verifican las restricciones de monotonía. Notar que la medida de un Boreliano B de \mathbb{R}^n se calcula como:

$$\mu_{t_1 t_2 \dots t_n}(B) = \sum_{\vec{m} \in B \cap \mathcal{S}^n} \mu_{t_1 t_2 \dots t_n}(\{(m_1, m_2, \dots, m_n)\}).$$

Pruebe además que IP y las funciones coordenadas $X_t : \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}$, verifican: si $s < t$ entonces $X_t - X_s$ es independiente del conjunto de variables aleatorias $\{X_u : 0 \leq u \leq s\}$. Calcule la distribución de $X_t - X_s$. Pruebe además que $IP(X_0 = 0) = 1$.

Pregunta 2 : El propósito de esta pregunta es estudiar la transformada de Fourier. Para ello necesitamos una generalización de un resultado visto en clases. En lo que sigue nuestro espacio de medida es $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$.

Teorema Supongamos que el núcleo regularizador $K_a(x)$ verifica

- $K_a(x)$ es continua en x para todo a ;
- $K_a(x)$ es integrable en x y $\int K_a(x) dx = 1$;
- Existen $0 < C_1, C_2 < \infty$ tal que para todo a grande $C_1 \leq \int |K_a(x)| dx \leq C_2$;
- Para todo $\delta > 0$ fijo se verifica $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} |K_a(x)| dx = 0$.

Entonces para $f \in L^1$ se tiene $\lim_{a \rightarrow \infty} \|f - K_a * f\|_1 = 0$. ■

Consideremos la transformada

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\xi} dx = \int f(x) \cos(x\xi) dx - i \int f(x) \sin(x\xi) dx.$$

0.5

(i) Pruebe que si $f \in L^1$ entonces \hat{f} está bien definida.

(ii) Supongamos que h, H, f son funciones integrables y que $h(x) = \frac{1}{2\pi} \int H(\xi) e^{ix\xi} d\xi$. Demuestre que

$$h * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int H(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

(iii) Considere $K(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$. Pruebe que

0.5

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{ix\xi} d\xi.$$

Tomemos $K_n(x) = nK(nx)$ para $n \geq 1$, y utilizando el Teorema enunciado pruebe que para $f \in L^1$ la sucesión de funciones

3.0

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|\xi|}{n} \right) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

converge a f en la norma de L^1 .

Ind.: Para calcular $\int \frac{(\sin(x/2))^2}{x^2} dx$ estudie la integral $\int \frac{1 - \cos(x)}{x^2 + a^2} dx$, calculada por residuos a la integral $\int \frac{1 - e^{iz}}{z^2 + a^2} dz$ y tome límite cuando $a \rightarrow 0$.