

Auxiliar 4: Regularidad, medibilidad e integrabilidad

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P3. (b) Sea f una función Lebesgue-integrable en $[0, 1]$ tal que $f(x) > 0$ para todo x . Muestre que para todo $\varepsilon > 0$

$$\inf_{\substack{A \subseteq [0,1] \\ \mu(A) \geq \varepsilon}} \int_A f d\mu > 0.$$

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y sea $B_n = \{x \in [0, 1] \mid f(x) > 1/n\}$. Claramente $N_n \subseteq B_m$ si $m \geq n$. Además, como $f(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$:

$$[0, 1] = \{x \in [0, 1] \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Por la continuidad de la medida, $\mu(B_n) \rightarrow 1$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B_N) \geq 1 - \varepsilon/2$. Sea $c = 1/N$ y $B = B_N$.

Sea A con $\mu(A) \geq \varepsilon$. Notemos que

$$\underbrace{\mu(A \cup B)}_{\leq 1} = \underbrace{\mu(A)}_{\geq \varepsilon} + \underbrace{\mu(B)}_{\geq 1 - \varepsilon/2} - \mu(A \cap B)$$

por lo que

$$\mu(A \cap B) = \underbrace{\mu(A)}_{\geq \varepsilon} + \underbrace{\mu(B)}_{\geq 1 - \varepsilon/2} - \underbrace{\mu(A \cup B)}_{\geq -1} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta forma,

$$\int_A f d\mu \geq \int_{A \cap B} f d\mu > c \cdot \mu(A \cap B) \geq c \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo que

$$\inf_{\substack{A \subseteq [0,1] \\ \mu(A) \geq \varepsilon}} \int_A f d\mu \geq c \cdot \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$