Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
24 de septiembre de 2013

Auxiliar 4: Regularidad, medibilidad e integrabilidad

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. **(a)** Sea $A \subseteq [0,1]$ un conjunto Lebesgue-medible tal que existe $\alpha > 0$ con $\mu(A \cap I) \geq \alpha\mu(I)$ para todo intervalo $I \subseteq [0,1]$. Pruebe que $\mu(A) = 1$.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue-medible de medida positiva. Muestre que

$$A - A = \{a - a' \ \mid \ a, a' \in A\}$$

contiene un intervalo abierto de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Concluya que $|A| = c$.

Indicación. Use la regularidad de la medida de Lebesgue y que la distancia entre un compacto y la frontera de un abierto que lo contiene es estrictamente positiva.

P2. **(a)** Sea $\mathcal{A}$ la tribu generada por los síngleton de un conjunto no numerable X. Muestre que $f\colon X \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible si y sólo si es constante salvo a lo más en un conjunto numerable.

(b) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo con $\mu(X) < \infty$. Pruebe que una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible si y sólo si para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ de medida positiva y para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \supseteq B \in \mathcal{A}$ de medida positiva tal que

$$\sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Indicación. Para la implicancia «hacia la izquierda» defina, dado $A \in \mathcal{A}$ de medida positiva y $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{B}(A, \varepsilon) = \left\{ B \in \mathcal{A} \ \mid \ B \subseteq A, \mu(B) > 0, \sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \right\}$$

y considere

$$\delta_1 = \sup_{B \in \mathcal{B}(X,\varepsilon)} \mu(B), \quad \delta_2 = \sup_{B \in \mathcal{B}(X \setminus B_1, \varepsilon)} \mu(B), \quad \delta_3 = \sup_{B \in \mathcal{B}(X \setminus B_2, \varepsilon)} \mu(B), \ldots$$

con $B_1 \in \mathcal{B}(X, \varepsilon)$ tal que $\mu(B_1) > \delta_1/2$, $B_2 \in \mathcal{B}(X \setminus B_1, \varepsilon)$ tal que $\mu(B_2) > \delta_2/2$, etc..

P3. **(a)** Sea f una función Lebesgue-integrable en $[0,1]$ y $0 < \alpha < 1$. El objetivo de este problema es demostrar que si la integral de f sobre todos los conjuntos de medida exactamente α es cero, entonces $f = 0$ casi seguramente. Para esto, se propone el siguiente esquema:

- **I)** Muestre que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ verifica $\mu(A_k) \to 0$, entonces $\int_{A_k} f d\mu \to 0$.
- **II)** Dado $\varepsilon > 0$, pruebe que existen naturales n, m tales que $0 \leq n - m\alpha < \varepsilon$.
  Indicación. Distinga el caso α racional e irracional. Para el caso α irracional, estudie la sucesión $([k\alpha])_{k \in \mathbb{N}}$, donde $[x] = x - \lfloor x \rfloor$ denota la parte fraccionaria de x.
- **III)** Use lo anterior para probar que $\int_{[0,1]} f d\mu = 0$.
- **IV)** Notando que $\min\{\alpha, 1 - \alpha\} \leq 1/2$, justifique que se puede suponer que $\alpha \leq 1/2$.
- **V)** Concluya.

(b) Sea f una función Lebesgue-integrable en $[0,1]$ tal que $f(x) > 0$ para todo x. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$

$$\inf_{\substack{A \subseteq [0,1] \\ \mu(A) \geq \varepsilon}} \int_A f d\mu > 0.$$