Auxiliar 1: Medidas y σ -álgebras

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Definición. Diremos que un cardinal α es un **número de Ulam** o un **cardinal no medible** si la única medida finita μ definida en $\mathcal{P}(X)$ con $|X| \leq \alpha$ que es nula en los singleton es la medida nula.

- (a) Muestre que α es un cardinal no medible si y sólo si para toda familia $\mathcal{F}$ de conjuntos disjuntos dos a dos con $|\mathcal{F}| \leq \alpha$ toda medida ν tal que $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$, $\nu(\bigcup \mathcal{F}) < \infty$ y tal que toda unión de una subfamilia de $\mathcal{F}$ es medible verifica $\nu(\bigcup \mathcal{F}) = 0$.

Solución:

$\implies$) Sea $\mathcal{F}$ familia de conjuntos disjuntos dos a dos con $|\mathcal{F}| \leq \alpha$ y ν una medida tal que $\nu(\bigcup \mathcal{F}) < \infty$, $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y tal que $\bigcup \mathcal{G}$ es medible para todo $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Tomemos $X = \bigcup \mathcal{F}$ y $\mu(\mathcal{G}) = \nu(\bigcup \mathcal{G})$ para todo $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Así, $\mu(X) = \nu(\bigcup \mathcal{F}) < \infty$ y

$$\mu(\{x\}) = \mu(\{A\}) = \nu\left(\bigcup \{A\}\right) = \nu(A) = 0$$

para todo $x \in X$. Como $|X| = |\mathcal{F}| \leq \alpha$, X y μ satisfacen las hipótesis de la definición, lo que implica que

$$\nu\left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \mu(\mathcal{F}) = \mu(X) = 0.$$

$\impliedby$) Sea X un conjunto con $|X| \leq \alpha$ y μ una medida en $\mathcal{P}(X)$ nula en los singleton. Tomemos $\mathcal{F} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ y $\nu(\bigcup \mathcal{G}) = \mu(\bigcup \mathcal{G})$ para todo $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ (notar que $\bigcup \mathcal{G} \subseteq X$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$). Así, $\nu(\bigcup \mathcal{F}) = \mu(X) < \infty$, $\nu(A) = \nu(\{x\}) = \mu(\{x\}) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y $\bigcup \mathcal{G} \in \mathcal{P}(X)$ es medible para todo $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Como $|\mathcal{F}| \leq \alpha$, $\mathcal{F}$ y ν satisfacen las hipótesis del enunciado, lo que implica que

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \nu\left(\bigcup \mathcal{F}\right) = 0.$$

- (b) Probaremos que si α es un número de Ulam infinito, entonces su sucesor β también lo es. Sea X con $|X| = \beta$, Y con $|Y| = \alpha$ y μ una medida finita en $\mathcal{P}(X)$ con $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$. Considere el siguiente esquema de demostración:

- i) Justifique que existe un buen orden de X tal que los conjuntos $A_x = \{x' \in X \mid x' < x\}$ tienen a lo más cardinal α para todo $x \in X$.

Solución: Por definición de cardinal sucesor, se tiene que

$$|X| = \underbrace{\left| \bigcup \{s \text{ ordinal} \mid |s| \leq \alpha\} \right|}_T.$$

Luego, existe $f: X \rightarrow T$ biyección. El conjunto T tiene un buen orden natural inducido por el buen orden de los ordinales ($t \leq t'$ en T si y sólo si $t \leq t'$ en algún ordinal s tal que $t, t' \in s$), lo que induce un buen orden en X : $x \leq x'$ si y sólo si $f(x) \leq f(x')$.

De esta forma,

$$f(A_x) = f(\{x' \in X \mid x' < x\}) = \{t' \in T \mid t' < f(x)\}.$$

Si s es un ordinal con $f(x) \in s$, entonces $f(A_x) \in s$ pues es un segmento inicial. Luego, $|f(A_x)| \leq |s| \leq \alpha$. Al ser f biyección preserva el cardinal, lo que muestra que $|A_x| \leq \alpha$.

ii) Sea $f_x: A_x \rightarrow Y$ inyectiva. Sea $A_x^y = \{x' \in X \mid x \leq x', f_{x'}(x) = y\}$. Muestre que existe $x \in X$ tal que $\mu(A_x^y) = 0$ para todo $y \in Y$.

Solución: Primero, notemos que si $x, x' \in X$ son distintos, entonces $A_x^y \cap A_{x'}^y = \emptyset$. En efecto, si $x'' \in A_x^y \cap A_{x'}^y$, se tiene que

$$\underbrace{x \leq x'' \wedge f_{x''}(x) = y}_{x'' \in A_x^y} \wedge \underbrace{x' \leq x'' \wedge f_{x''}(x') = y}_{x'' \in A_{x'}^y}.$$

En particular, $f_{x''}(x) = f_{x''}(x') = y$, lo que muestra que $x = x'$ por la inyectividad de $f_{x''}$. Notemos ahora que si $D \subseteq \mathbb{R}_0^+$ es tal que

$$\sum_{d \in D} d \doteq \sup_{\substack{D' \subseteq D \\ D' \text{ finito}}} \sum_{d \in D'} d < \infty$$

entonces $\{d \in D \mid d > 0\}$ es a lo más numerable. De hecho, los conjuntos

$$D_n = \{d \in D \mid d > 1/n\}$$

son finitos, ya que, si no, existiría una secuencia de conjuntos $\{D^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $D^k \subseteq D_n$ y $|D^k| = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que implica que

$$\sum_{d \in D} d \geq \sum_{d \in D^k} d > \frac{k}{n}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que muestra que $\sum_{d \in D} d = \infty$. Como

$$\{d \in D \mid d > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

y la unión numerable de conjuntos finitos es a lo más numerable, se concluye lo deseado. Luego, como fijando $y \in Y$ se tiene que

$$\sum_{x \in X} \mu(A_x^y) = \sup_{\substack{X' \subseteq X \\ X' \text{ finito}}} \sum_{x \in X'} \mu(A_x^y) = \sup_{\substack{X' \subseteq X \\ X' \text{ finito}}} \mu\left(\bigcup_{x \in X'} A_x^y\right) \leq \mu(X) < \infty$$

obtenemos que $\{x \in X \mid \mu(A_x^y) > 0\}$ es a lo más numerable.

Así,

$$|\{(y, x) \in Y \times X \mid \mu(A_x^y) > 0\}| \leq \alpha \cdot \mathbb{N} \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha < \beta.$$

Si para todo $x \in X$ existiera $y \in Y$ tal que $\mu(A_x^y) > 0$, tendríamos que el conjunto anterior tiene cardinal al menos β , pues contiene al menos una copia de X . Concluimos entonces que existe $x^* \in X$ tal que $\mu(A_{x^*}^y) = 0$ para todo $y \in Y$.

iii) Concluya.

Solución: Usamos la caracterización de la parte (a) con $\mathcal{F} = \{A_{x^*}^y\}_{y \in Y}$. Como $|\mathcal{F}| \leq \alpha$ y α es un cardinal no medible, obtenemos que

$$\mu\left(\underbrace{\bigcup_{y \in Y} A_{x^*}^y}_A\right) = 0.$$

Notemos que

$$A = \bigcup_{y \in Y} A_{x^*}^y = \bigcup_{y \in Y} \{x' \in X \mid x^* \leq x', f_{x'}(x^*) = y\} = \{x' \in X \mid x^* \leq x'\}.$$

Luego,

$$X \setminus A = \{x' \in X \mid x' < x^*\},$$

que es un conjunto de cardinal a lo más α . Usando nuevamente que α es un número de Ulam, concluimos que $\mu(X \setminus A) = 0$. De esta forma,

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(X \setminus A) = 0.$$

- (c) Sea ahora $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos indexados por ordinales $i \in I$ tales que $i < j$ implica $S_i \subseteq S_j$ y $|S_i| < |S_j|$. Suponga además que $|S_i|$ es un número de Ulam para todo $i \in I$ y que $|S|$ también lo es. Pruebe que $|\bigcup \mathcal{S}|$ también lo es.

Solución: Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos con $|\mathcal{F}| \leq |\bigcup \mathcal{S}|$ y ν medida con $\nu(\bigcup \mathcal{F}) < \infty$, $\bigcup \mathcal{G}$ medible para todo $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ inyectiva. Sea

$$\mathcal{F}_i = \{A \in \mathcal{F} \mid f(A) \in S_{i+1} \setminus S_i\}, \quad \mathcal{F}_{-1} = \{A \in \mathcal{F} \mid f(A) \in S_0\}.$$

Se tiene que $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ y que $|\mathcal{F}_i| = |S_{i+1}|$ para todo $i \in I \cup \{-1\}$. Como $|S_i|$ es un número de Ulam para todo $i \in I$, concluimos, usando la caracterización de la parte (a), que

$$\nu\left(\bigcup \mathcal{F}_i\right) = 0 \quad \forall i \in I.$$

Además,

$$\mathcal{F}' = \left\{ \bigcup \mathcal{F}_i \mid i \in I \right\}$$

tiene cardinal $|I|$ que es no medible, lo que implica, usando nuevamente la caracterización, que

$$\nu\left(\bigcup \mathcal{F}'\right) = 0.$$

El resultado se concluye del hecho que $\bigcup \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}$.

- P2.** Sea X un conjunto y $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de σ -álgebras en X tales que $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El objetivo de este problema es probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ **no** es una σ -álgebra. Para esto, se propone el siguiente esquema:

- (a) Supongamos que existe $B \in \mathcal{A}_1 \setminus \{X, \emptyset\}$. Muestre que si

$$B \cap \mathcal{A}_n = B \cap \mathcal{A}_{n+1} \quad \text{y} \quad (X \setminus B) \cap \mathcal{A}_n = (X \setminus B) \cap \mathcal{A}_{n+1}$$

entonces $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$.

Solución: Sea $A \in \mathcal{A}_{n+1}$. Luego, $B \cap A \in \mathcal{A}_n$ y $(X \setminus B) \cap A \in \mathcal{A}_n$. Como

$$A = (B \cap A) \cup ((X \setminus B) \cap A)$$

se concluye que $A \in \mathcal{A}_n$. La otra inclusión es idéntica.

- (b) Muestre que existe $E \in \mathcal{A}_1 \setminus \{X, \emptyset\}$ y $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia estrictamente creciente de naturales tal que $\{E \cap \mathcal{A}_{p_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una secuencia estrictamente creciente de σ -álgebras en E .

Solución: Tomemos B de la parte anterior. Luego, como $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe ocurrir que

$$B \cap \mathcal{A}_n \subsetneq B \cap \mathcal{A}_{n+1}$$

o que

$$(X \setminus B) \cap \mathcal{A}_n \subsetneq (X \setminus B) \cap \mathcal{A}_{n+1}.$$

Alguna de estas dos afirmaciones debe ocurrir para infinitos $n \in \mathbb{N}$, pues si las dos ocurrieran sólo para finitos $n \in \mathbb{N}$ se tendría que para infinitos $n \in \mathbb{N}$ no ocurre ninguna. Definamos $E \in \{B, X \setminus B\}$ tal que lo anterior sucede una infinidad de veces. Definimos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como los índices tales que

$$E \cap \mathcal{A}_n \subsetneq E \cap \mathcal{A}_{n+1}$$

(p_1 es el primer n que verifica esto, p_2 es el segundo, etc.).

- (c) Construya conjuntos disjuntos $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una secuencia estrictamente creciente de naturales $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $F_k \in \mathcal{A}_{j_{k+1}} \setminus \mathcal{A}_{j_k}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ y que $j_k = k$.

Solución: Sea $j_1 = 1$ y $E_1 = E$ como en la parte anterior. Esto nos da una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{p_i^1\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(E_1 \cap \mathcal{A}_{p_{i'}^1}) \setminus (E_1 \cap \mathcal{A}_{p_i^1}) \neq \emptyset \quad \forall i < i'.$$

Sea $E_2 \in (E_1 \cap \mathcal{A}_{p_2^1}) \setminus (E_1 \cap \mathcal{A}_{p_1^1})$ tal que existe $\{p_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{p_i^1\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $p_i^2 = p_i^1$ para $i \leq 2$ que verifica

$$(E_2 \cap \mathcal{A}_{p_{i'}^2}) \setminus (E_2 \cap \mathcal{A}_{p_i^2}) \neq \emptyset \quad \forall 2 \leq i < i'.$$

Como $E_1 \in \mathcal{A}_{p_2^1}$ (está en $\mathcal{A}_1$), se tiene que $E_2 \in \mathcal{A}_{p_2^1}$ (ya que $E_2 \in E_1 \cap \mathcal{A}_{p_2^1}$). Tomamos $j_2 = p_2^1$.

Sea $E_3 \in (E_2 \cap \mathcal{A}_{p_3^2}) \setminus (E_2 \cap \mathcal{A}_{p_2^2})$ tal que existe $\{p_i^3\}_{i \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{p_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $p_i^3 = p_i^2$ para $i \leq 3$ que verifica

$$(E_3 \cap \mathcal{A}_{p_{i'}^3}) \setminus (E_3 \cap \mathcal{A}_{p_i^3}) \neq \emptyset \quad \forall 3 \leq i < i'.$$

Como $E_2 \in \mathcal{A}_{p_3^2}$ (está en $\mathcal{A}_{p_2^1}$), se tiene que $E_3 \in \mathcal{A}_{p_3^2}$ (ya que $E_3 \in E_2 \cap \mathcal{A}_{p_3^2}$). Tomamos $j_3 = p_3^2$.

Continuamos inductivamente: si tenemos E_k y $\{p_i^k\}_{i \in \mathbb{N}}$, tomamos $E_{k+1} \in (E_k \cap \mathcal{A}_{p_{k+1}^k}) \setminus (E_k \cap \mathcal{A}_{p_k^k})$ tal que existe $\{p_i^{k+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{p_i^k\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $p_i^{k+1} = p_i^k$ para todo $i \leq k+1$ que verifica

$$E_{k+1} \in (E_k \cap \mathcal{A}_{p_{i'}^{k+1}}) \setminus (E_k \cap \mathcal{A}_{p_i^{k+1}}) \quad \forall k+1 \leq i < i'.$$

Como $E_k \in \mathcal{A}_{p_{k+1}^k}$ (está en $\mathcal{A}_{p_{k-1}^{k-1}}$), se tiene que $E_{k+1} \in \mathcal{A}_{p_{k+1}^k}$ (ya que $E_{k+1} \in E_k \cap \mathcal{A}_{p_{k+1}^k}$).

Tomamos $j_{k+1} = p_{k+1}^k$.

De esta forma

$$E_{k+1} \in (E_k \cap \underbrace{\mathcal{A}_{j_{k+1}}}_{\mathcal{A}_{p_{k+1}^k}}) \setminus (E_k \cap \underbrace{\mathcal{A}_{j_k}}_{\mathcal{A}_{p_k^k}}).$$

Además, $E_k \in \mathcal{A}_{p_k^{k-1}} = \mathcal{A}_{p_k^k} = \mathcal{A}_{j_k}$.

Tomamos $F_k = E_k \setminus E_{k+1}$. Claramente $F_k \in \mathcal{A}_{j_{k+1}}$ y los F_k son disjuntos dos a dos. Como $E_{k+1} \notin \mathcal{A}_{j_k}$ y $E_k \in \mathcal{A}_{j_k}$, se tiene que $F_k \notin \mathcal{A}_{j_k}$ (si estuviera, $E_k \cup F_k = E_{k+1} \in \mathcal{A}_{j_k}$).

Notemos que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{j_k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_k$$

pues los conjuntos son encajonados y j_k es estrictamente creciente. Debido a esto, podemos suponer que $j_k = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (el objetivo es probar que la unión no es σ -álgebra y tal unión no cambia al reducir nuestra sucesión de σ -álgebras a las de la forma $\mathcal{A}_{j_k}$). Por otro lado, podemos suponer que $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, pues podemos reemplazar $\mathcal{A}_n$ por $(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \cap \mathcal{A}_n$. Se tiene que si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \cap \mathcal{A}_n)$ no es σ -álgebra, entonces existe una colección numerable de conjuntos $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} ((\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \cap A_m) \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \cap \mathcal{A}_n)$, lo que implica que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, es decir, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ tampoco es una σ -álgebra.

- (d) Sea $\pi: X \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $\pi(x) = k$ si $x \in F_k$. Sea $\mathcal{A}'_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \pi^{-1}(A) \in \mathcal{A}_n\}$. Muestre que $\{k \geq n\} \in \mathcal{A}'_n$ y defina $B_n \subseteq \{k \geq n\}$ como el conjunto más pequeño con $n \in B_n \in \mathcal{A}'_n$. Pruebe además que si $m \in B_n$, entonces $B_m \subseteq B_n$.

Solución: Como $\mathcal{A}'_n$ es una σ -álgebra, basta ver que $\{k < n\} \in \mathcal{A}'_n$ para probar que $\{k \geq n\} \in \mathcal{A}'_n$. Esto es claro, pues $F_k \in \mathcal{A}_n$ para todo $k < n$, lo que implica que

$$\pi^{-1}(\{k < n\}) = \bigcup_{k < n} F_k \in \mathcal{A}_n,$$

que es la definición de que $\{k < n\} \in \mathcal{A}'_n$.

La idea es definir

$$B_n = \bigcap_{n \in A \in \mathcal{A}'_n} A,$$

pues de esta forma se tiene que si $n \in A \in \mathcal{A}'_n$, entonces $B_n \subseteq A$. El problema es que esta intersección no es necesariamente numerable, por lo que no es claro que al definir B_n de esta forma se tenga que $B_n \in \mathcal{A}'_n$. Para solucionar esto, notemos que para cada $j \in B_n^c$ existe $A_j \in \mathcal{A}'_n$ tal que $n \in A_j$ y $j \notin A_j$. Así, escribiendo

$$B_n = \bigcap_{j \in B_n^c} A_j$$

obtenemos que B_n se escribe como una intersección numerable de elementos de $\mathcal{A}'_n$, por lo que $B_n \in \mathcal{A}'_n$.

Si $m \in B_n$ se tiene que $m \geq n$, pues $B_n \subseteq \{k \geq n\}$. Esto implica que $\mathcal{A}'_n \subseteq \mathcal{A}'_m$, por lo que $B_n \in \mathcal{A}'_m$. Como B_m es el conjunto más pequeño en $\mathcal{A}'_m$ que contiene a m y B_n es un conjunto en $\mathcal{A}'_m$ que contiene a m , debe tenerse que $B_m \subseteq B_n$.

- (e) Sea $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia estrictamente creciente de naturales tales que $n_{k+1} \in B_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $E = \{n_2, n_4, n_6, n_8, \dots\}$. Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \in \mathcal{A}'_n$ y encuentre una contradicción.

Solución: Es claro que $B_n \neq \{n\}$, pues $F_n \notin \mathcal{A}_n$. De esta para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n' > n$ tal que $n' \in B_n$.

Tomemos $n_1 = 1$. Sea $n_2 > n_1$ tal que $n_2 \in B_{n_1}$. Sea $n_3 > n_2$ tal que $n_3 \in B_{n_2}$. Continuamos inductivamente, de modo que tomamos $n_{k+1} > n_k$ tal que $n_{k+1} \in B_{n_k}$. Estos conjuntos son encajonados: $B_{n_1} \supseteq B_{n_2} \supseteq B_{n_3} \dots$.

Sea $E = \{n_2, n_4, n_6, n_8, \dots\}$. Si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ fuera σ -álgebra, entonces

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{2k} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n,$$

por lo que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\pi^{-1}(E) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{2k} \in \mathcal{A}_p$. Esto es equivalente a que $E \in \mathcal{A}'_p$. Como las σ -álgebras $\mathcal{A}'_k$ son crecientes se tiene que $E \in \mathcal{A}_{n_{2p}}$ (claramente $n_{2p} \geq p$). Además, $n_{2p} \in E$, lo que muestra que $B_{n_{2p}} \subseteq E$. Esto contradice el hecho que $n_{2p+1} \in B_{n_{2p}}$, pues en E hay sólo números pares. Así, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{2k}$ no puede pertenecer a ningún $\mathcal{A}_n$, lo que muestra que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ no es σ -álgebra.