Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
3 de septiembre de 2013

Auxiliar 1: Medidas y σ-álgebras

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Definición. Diremos que un cardinal α es un **número de Ulam** o un **cardinal no medible** si la única medida finita μ definida en $\mathcal{P}(X)$ con $|X| \leq \alpha$ que es nula en los síngleton es la medida nula.

(a) Muestre que α es un cardinal no medible si y sólo si para toda familia $\mathcal{F}$ de conjuntos disjuntos dos a dos con $|\mathcal{F}| \leq \alpha$ toda medida ν tal que $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$, $\nu\left(\bigcup F\right) < \infty$ y tal que toda unión de una subfamilia de $\mathcal{F}$ es medible verifica $\nu\left(\bigcup \mathcal{F}\right) = 0$.

(b) Probaremos que si α es un número de Ulam infinito, entonces su sucesor β también lo es. Sea X con $|X| = \beta$, Y con $|Y| = \alpha$ y μ una medida finita en $\mathcal{P}(X)$ con $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$. Considere el siguiente esquema de demostración:

- **i)** Justifique que existe un buen orden de X tal que los conjuntos $A_x = \{x' \in X \mid x' < x\}$ tienen a lo más cardinal α para todo $x \in X$.
- **ii)** Sea $f_x : A_x \to Y$ inyectiva. Sea $A_x^y = \{x' \in X \mid x \leq x', f_{x'}(x) = y\}$. Muestre que existe $x \in X$ tal que $\mu(A_x^y) = 0$ para todo $y \in Y$.
- **iii)** Concluya.

(c) Sea ahora $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos indexados por ordinales $i \in I$ tales que $i < j$ implica $S_i \subseteq S_j$ y $|S_i| < |S_j|$. Suponga además que $|S_i|$ es un número de Ulam para todo $i \in I$ y que $|\mathcal{S}|$ también lo es. Pruebe que $|\bigcup \mathcal{S}|$ también lo es.

P2. Sea X un conjunto y $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de σ-álgebras en X tales que $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El objetivo de este problema es probar que $\bigcup_{n \in N} \mathcal{A}_n$ **no** es una σ-álgebra. Para esto, se propone el siguiente esquema:

(a) Supongamos que existe $B \in \mathcal{A}_1 \setminus \{X, \varnothing\}$. Muestre que si

$$B \cap \mathcal{A}_n = B \cap \mathcal{A}_{n+1} \quad \text{y} \quad (X \setminus B) \cap \mathcal{A}_n = (X \setminus B) \cap \mathcal{A}_{n+1}$$

entonces $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$.

(b) Muestre que existe $E \in \mathcal{A}_1$ y $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia estrictamente creciente de naturales tal que $\{E \cap A_{p_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una secuencia estrictamente creciente de σ-álgebras en E.

(c) Construya conjuntos disjuntos $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una secuencia estrictamente creciente de naturales $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $F_k \in \mathcal{A}_{j_k+1} \setminus \mathcal{A}_{j_k}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ y que $j_k = k$.

(d) Sea $\pi : X \to \mathbb{N}$ definida por $\pi(x) = k$ si $x \in F_k$. Sea $\mathcal{A}'_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \pi^{-1}(A) \in \mathcal{A}_n\}$. Muestre que $\{k \geq n\} \in A'_n$ y defina $B_n \subseteq \{k \geq n\}$ como el conjunto más pequeño con $n \in B_n \in \mathcal{A}'_n$. Pruebe además que si $m \in B_n$, entonces $B_m \subseteq B_n$.

(e) Sea $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia estrictamente creciente de naturales tales que $n_{k+1} \in B_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $E = \{n_2, n_4, n_6, n_8, \ldots, \}$. Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \in \mathcal{A}'_n$ y encuentre una contradicción.