MA37A Optimización
Clase Auxiliar # 1

Profesor: Jaime González
Auxiliar: Oscar Peredo

14 de Marzo del 2006

1. Motivación [Opcional]

Para cada problema, intente plantear un modelo lineal, es decir, maximizar o minimizar una función lineal dadas restricciones del tipo $Ax = b$, $Ax \leq b$ o $Ax \geq b$, o agregue restricciones que considere necesarias.

Problema 1 (Problema de la Mochila (o Knapsack)). *Se intenta llenar una mochila de volumen fijo V con n items cada uno de volumen v_i y donde a cada item se le asocia un factor de necesidad a_i, es decir, si $a_i > a_j$ significa que el item i-ésimo es más necesario que el j-ésimo. Plantee el problema para maximizar la cantidad de items necesarios (pueden haber uno o mas items del mismo tipo y no pueden haber "trozos"de algun item).*

Solución 1. *Se definen las variables x_j como la cantidad de items del tipo j-ésimo.*
La función a maximizar es:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

La restricción fundamental es que no se sobrepase el volumen de la mochila:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V$$

Las restricciones que faltan tienen que ver con la positividad en la cantidad de items y su valor, que necesariamente debe ser entero:

$$x_j \geq 0, \forall j$$
$$x_j \in \mathbb{Z}, \forall j$$

Por lo tanto, el problema queda de la forma:

$$\begin{aligned} max \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \\ s.a \quad & \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V \\ & x_j \geq 0, \forall j \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \forall j \end{aligned}$$

Problema 2 (Sumar N primeros números). *Se tienen N números $c_1, ..., c_N$ cuyo orden es $c_{\sigma(1)} \leq ... \leq c_{\sigma(N)}$. Encontrar el valor de $\sum_{i=1}^{K} c_{\sigma(i)}$, con $K \leq N$.*

Solución 2. *La idea es encontrar la suma mínima que involucre a K números, es decir:*

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \\
s.a \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = K \\
& x_i \in \{0,1\}, \forall i
\end{aligned}
$$

Al ser variables binarias, con la primera restricción se garantiza que habrán K variables activas, lo que entrega como función objetivo la suma de los números asociados.

Problema 3 (Carga transportada en un container). *Se desea maximizar la carga transportada dentro de un container. Tenemos cinco tipos de materiales distintos (A,B,C,D y E), cuyos pesos y volúmenes totales son los siguientes:*

tipo	*peso [kg]*	*volumen [m^3]*
A	*1*	*3*
B	*2*	*3*
C	*8*	*4*
D	*2*	*4*
E	*5*	*2*

Debe saber que la principal restricción concierne la capacidad del container dada por $7m^3$.
¿ Que fracción del total de cada material irá en el container?

Solución 3. ***Variables**: x_i=fraccion de la cantidad del tipo i que se llevara en el container (introduce una restriccion inmediata: $0 \leq x_i \leq 1$).*
***Función objetivo**:*

$$\textbf{\textit{maximizar}} \qquad x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 5x_5$$

***Restricciones**:*
El volumen total no debe ser mayor que $7m^3$:

$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 \quad \leq \quad 7$$

Todas las variables estan entre 0 y 1, pues son fracciones de la carga total de cada tipo:

$$x_i \quad \leq \quad 1$$

El problema queda:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\textbf{\textit{maximizar}} & x_1 & +2x_2 & +8x_3 & +2x_4 & +5x_5 & & \\
\textbf{\textit{s.a}} & 3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +2x_5 & \leq & 7 \\
& x_1 & & & & & \leq & 1 \\
& & x_2 & & & & \leq & 1 \\
& & & x_3 & & & \leq & 1 \\
& & & & x_4 & & \leq & 1 \\
& & & & & x_5 & \leq & 1 \\
& & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema 4 (Programación de horarios). *Un hospital planea hacer horarios nocturnos semanales para las enfermeras. Cada día se requieren D_i enfermeras y cada enfermera puede trabajar 5 dias seguidos. Encuentre el número mínimo de enfermeras que se necesita contratar.*

Solución 4. *Las variables x_i serán el número de enfermeras que comienzan a trabajar en el día j. Se quiere minimzar la siguiente función:*

$$\sum_{i=1}^{7} x_i$$

Las enfermeras que comienzan a trabajar el Lunes, trabajaran sin parar hasta el Viernes, luego, se deben contabilizar en la atención de la demanda para esos dias. Similarmente las que comienzan el Martes, trabajaran hasta el Sábado, etcetera.
Esto se puede modelar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcccccccll}
min & \sum_{i=1}^{7} x_i & & & & & & & & \\
s.a & x_1+ & & & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7 & \geq & D_1 \\
& x_1+ & x_2+ & & & x_5+ & x_6+ & x_7 & \geq & D_2 \\
& x_1+ & x_2+ & x_3+ & & & x_6+ & x_7 & \geq & D_3 \\
& x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & & & x_7 & \geq & D_4 \\
& x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 & & & \geq & D_5 \\
& & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6 & & \geq & D_6 \\
& & & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7 & \geq & D_7 \\
& x_i \geq 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Problema 5 (Planificación Minera). *Una mina de cobre esta compuesta por N secciones. Cada sección tiene un peso total de W_i y un peso w_i de cobre dentro de la sección (con i el índice de la sección). La cantidad total (en toneladas de peso) que se puede extraer de la mina es $C_t(W)$ (de peso total) y $C_t(w)$ (de peso en cobre) en cada período t. Además, se sabe el beneficio b_i (en millones de pesos) de cada seccion. Plantee un modelo lineal para calcular la extracción de las secciones en T períodos, maximizando el beneficio total.*

Solución 5. *Consideremos las variables (de decisión):*

$$x_{i,t} = \begin{cases} 1 & \text{la sección } i \text{ se saca en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

El beneficio obtenido en un período t se calcula de la forma:

$$\sum_{i \in \{1,..,N\}} x_{i,t} b_i$$

Por lo tanto, en T períodos:

$$\sum_{t \in \{1,..,T\}} \sum_{i \in \{1,..,N\}} x_{i,t} b_i$$

Las restricciones asociadas al peso total y al peso del cobre son las siguientes:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i \in \{1,..,N\}} x_{i,t} W_i & \leq & C_t(W) & \forall t \in \{1,..,T\} \\
\sum_{i \in \{1,..,N\}} x_{i,t} w_i & \leq & C_t(w) & \forall t \in \{1,..,T\}
\end{array}$$

Por último, hay que considerar que cada sección solo se extrae a lo más una vez:

$$\sum_{t \in \{1,..,T\}} x_{i,t} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1,..,N\}$$

El modelo queda de la forma:

$$
\begin{array}{llll}
max & \displaystyle\sum_{t\in\{1,..,T\}}\sum_{i\in\{1,..,N\}} x_{i,t}b_i & & \\
s.a & \displaystyle\sum_{i\in\{1,..,N\}} x_{i,t}w_i^1 \leq c_t^1 & & \forall t\in\{1,..,T\} \\
 & \displaystyle\sum_{i\in\{1,..,N\}} x_{i,t}w_i^2 \leq c_t^2 & & \forall t\in\{1,..,T\} \\
 & \displaystyle\sum_{t\in\{1,..,T\}} x_{i,t} \leq 1 & & \forall i\in\{1,..,N\} \\
 & x_{i,t}\in\{0,1\} & & \forall (i,t)\in\{1,..,N\}\times\{1,..,T\}
\end{array}
$$

Problema 6 (Problema de Producción). *Considere una fábrica con 3 tipos de maquinas A,B y C que pueden producir 4 productos (cada producto debe pasar por las 3 maquinas, y ellas funcionan en forma continua). Suponga además que el tiempo para ajustar las maquinas entre cambios de productos es despreciable. Debe tener en cuenta la cantidad de productos generados por cada maquina, las ganancias y los tiempos de uso siguientes::*

Tipo de máquina	P_1	P_2	P_3	P_4	*Tiempo total disponible (horas)*
A	1,5	1	2,4	1	2000
B	1	5	1	3,5	8000
C	1,5	3	3,5	1	5000
$	5,24	7,3	8,34	4,18	

Plantee el problema de producción semanal que maximiza ganacias.

Solución 6. *Las variables x_i representaran la cantidad a producir en una semana del producto i-ésimo. Luego, lo que se quiere maximizar es:*

$$5,24x_1 + 7,3x_2 + 8,34x_3 + 4,18x_4$$

Las restricciones se obtienen observando los tiempos que utiliza cada maquina:

$$
\begin{array}{rcll}
1,5x_1 + x_2 + 2,4x_3 + x_4 & \leq & 2000 & (A) \\
x_1 + 5x_2 + x_3 + 3,5x_4 & \leq & 8000 & (B) \\
1,5x_1 + 3x_2 + 3,5x_3 + x_4 & \leq & 5000 & (C)
\end{array}
$$

Ademas:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. Representación Puntual

Problema 7. *Dado el siguiente sistema:*

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & -x_6 & = & 1 \\
-x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & & +3x_6 & = & -2 \\
-3x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & +2x_6 & = & 2
\end{array}
$$

Obtenga la representación puntual del conjunto de las soluciones del sistema, usando Gauss y la base $\{a_3, a_2, a_5\}$.

Solución 7. *Pivoteando con Gauss el sistema, de tal forma que aparezca la identidad en las columnas que se nos indican como base (en el orden que se indica), se obtiene el siguiente cuadro:*

2	0	1	2	0	2	3
1/2	1	0	0	0	5/2	1/2
−1/2	0	0	1	1	1/2	3/2

La solucion básica asociada a la base se obtiene reemplazando el termino del lado derecho en la coordenada que indica la columna con un 1 *en la fila respectiva, es decir,* $\overline{x} = (0, 1/2, 3, 0, 3/2, 0)^t$.

Las soluciones básicas homogeneas se obtienen de la forma:

- *s.b.h. asociada a la columna 1:*
  $+1$ *en la coordenada 1.*
  $-(2)$ *en la coordenada 3.*
  $-(1/2)$ *en la coordenada 2.*
  $-(-1/2)$ *en la coordenada 5.*
  0 *en las coordenadas restantes.*
  $q_1 = (1, -1/2, -2, 0, 1/2, 0)^t$.
- *s.b.h. asociada a la columna 4:*
  $+1$ *en la coordenada 4.*
  $-(2)$ *en la coordenada 3.*
  $-(0)$ *en la coordenada 2.*
  $-(1)$ *en la coordenada 5.*
  0 *en las coordenadas restantes.*
  $q_2 = (0, 0, -2, 1, -1, 0)^t$.
- *s.b.h. asociada a la columna 6:*
  $+1$ *en la coordenada 6.*
  $-(2)$ *en la coordenada 3.*
  $-(5/2)$ *en la coordenada 2.*
  $-(1/2)$ *en la coordenada 5.*
  0 *en las coordenadas restantes.*
  $q_3 = (0, -5/2, -2, 0, -1/2, 1)^t$.

La representacion puntual es:

$$S \quad = \quad \{x : x = \overline{x} + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Problema 8. *Para el sistema*

$$\begin{array}{cccccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & -x_6 & = & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & & +3x_6 & = & -2 \end{array}$$

Clasificar los siguientes puntos:

1. $(0, -1, 1, 1, 1, 1)$
2. $(2, 0, -4, 1, 1, 0)$
3. $(0, 1, 0, 2, 0, 0)$
4. $(0, 1, 2, 0, 1, 0)$
5. $(x_1, x_2, x_4, x_5) = (2/3, 4/3, 1, 1)$

segun si son soluciones, soluciones básicas, soluciones homogeneas o soluciones básicas homogeneas.

Solución 8. *Veamos cada punto:*

1. *Se satisface* $Ax = b$*, luego es solucion. No es factible pues tiene una coordenada negativa. No es basica pues ocupa 5 columnas (l.d.).*
2. *Al reemplazar en el sistema, se satisface* $Ax = 0$*, luego es homogenea. No es factible pues tiene una coord. negativa. No es basica pues ocupa 4 columnas.*

3. *Se satisface $Ax = b$, luego es solucion. Es factible, pues todas sus componentes son no negativas. No es basica pues ocupa las columnas 2 y 4, que son l.d.*

4. *Se satisface el sistema $Ax = 0$, luego es homogenea. Es factible. Y es basica, pues las columnas que ocupa en la matriz son l.i. por parejas (y por lo tanto todas son l.i.).*

5. *No es solucion pues solo tiene 4 componentes (el sistema tiene 6).*