

Guía N° 1 de Optimización MA37A/Prof: Jorge Amaya

Auxiliares: Raul Aliaga, Roberto Cortez, Rodrigo Lopez

Jueves 24 de Marzo del 2005

Modelación de Problemas Lineales

Problema 1

Considere una fábrica con tres tipos de máquinas: A, B y C, que pueden producir cuatro productos: 1, 2, 3 y 4. Cada producto debe pasar por alguna operación en cada uno de los tres tipos de máquina. Suponga que la producción es continua (i.e. se puede producir una cantidad no necesariamente entera de productos) y que cada producto debe pasar primero por una máquina A, luego por una B y finalmente por una C. Suponga además que el tiempo requerido para ajustar las máquinas al cambiar de producto es despreciable. La tabla siguiente muestra: **1.-** Las horas requeridas en cada tipo de máquina por unidad de cada producto, **2.-** El tiempo total disponible por semana por máquina y **3.-** La ganancia por la venta de una unidad de cada producto.

| Tipo de Máquina | Producto 1 | Producto 2 | Producto 3 | Producto 4 | Tiempo Total disponible por semana |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------------------------------|
| A | 1.5 | 1 | 2.4 | 1 | 2000 |
| B | 1 | 5 | 1 | 3.5 | 8000 |
| C | 1.5 | 3 | 3.5 | 1 | 5000 |
| Ganancia por unidad | 5.24 | 7.30 | 8.34 | 4.18 | |

Se desea determinar la producción semanal de cada producto que maximiza las ganancias. Plantee el problema como un problema de programación lineal.

Problema 2

Parte (a)

Una fábrica tiene tres bodegas: B_1 , B_2 y B_3 , donde tiene almacenadas b_1 , b_2 y b_3 sillas respectivamente. Se tienen además cuatro puntos de venta: V_1 , V_2 , V_3 y V_4 , donde se requieren v_1 , v_2 , v_3 y v_4 sillas respectivamente. Suponga que es posible enviar sillas desde cualquier bodega a cualquier punto de venta. Considere que el costo de llevar una silla de la bodega B_i al punto de venta V_j es c_{ij} . Se desea satisfacer las demandas minimizando el costo de transporte. Plantee este problema como un problema de programación lineal, haciendo las suposiciones que crea necesarias.

Parte (b)

Suponga que por problemas con el sindicato de camioneros, no se puede llevar más que d_{ij} sillas desde B_i hasta V_j . Agregue las restricciones correspondientes para incorporar esta situación al planteamiento del problema anterior, y deduzca en que país está la fábrica.

Problema 3

Suponga que el productor de un artículo en particular conoce o es capaz de estimar la demanda de su producto para los próximos n meses. Se desea programar la construcción a lo largo de dichos n meses de modo de minimizar los costos variables totales. Asumiremos que el producto puede ser almacenado durante estos n meses. Habrá un costo asociado a mantener una unidad de producción en inventario durante un mes.

En algunas circunstancias, la sobreproducción puede ser provechosa, y en otras debe ser evitada. por ejemplo, podría ser que si se programa la producción para satisfacer exactamente la demanda durante algunos meses, se necesitaría mucha sobreproducción en ciertos meses de demanda especialmente alta. Por otro lado, ciertas cantidades de producto se pueden producir y almacenar en producción normal durante meses de baja demanda, para ser almacenados hasta que la demanda exceda la producción. En otros casos podría ser mejor sobreproducir en ciertos meses e ir almacenando, incluso con una demanda baja, porque el costo de producción puede ser menor durante dichos meses, tal vez por cambios de precios de la materia prima por temporadas u otras razones. El problema está en programar la producción de modo de balancear los costos de almacenaje contra los costos de sobreproducción (horas extra, máquinas, etc), para minimizar el costo variable total.

Plantee el problema como uno de programación lineal. Considere para estos efectos c_i el costo de producir una unidad en el mes i en jornada normal, el costo d_i de producir una unidad en el mes i en jornada extraordinaria, y el costo f_i de almacenar una unidad durante el mes i . Se tiene además como datos a_i , la capacidad de producción en jornada ordinaria en el mes i , a'_i , la capacidad de sobreproducción en el mes i , y b_j la cantidad de unidades requeridas en el mes j . El programa lineal debe determinar la producción que minimize la suma de costos de producción y almacenamiento. (HINT: Considere como variables x_{ij} , el número de unidades producidas en jornada ordinaria en el mes i y vendidas en el mes j , e y_{ij} , el número de unidades producidas en jornada extraordinaria en el mes i y vendidas en el mes j)

Direcciones y Puntos extremos, y resolución gráfica de problemas lineales

Problema 4

Calcule todos los puntos extremos y direcciones extremas de los poliedros asociados a los siguientes problemas, y resuelvalos gráficamente:

(i)

$$\begin{aligned}\text{máx } z &= 5x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\text{máx } z &= 2,5x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\text{mín } z &= 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_4 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 &= 4 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\text{máx } z &= 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ -0,5x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\text{máx } z &= -3x_1 + 2x_2 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Convexidad

Problema 5

(a)

Sean

$$\begin{aligned}Z(b) &= \text{máx}\{c^T x / Ax \leq b, \quad x \geq 0\} \\ V(c) &= \text{máx}\{c^T x / Ax \leq b, \quad x \geq 0\}\end{aligned}$$

Demuestre que Z es cóncava y V es convexa; asumiendo que b y c están en dominios convexos en los que estos dos problemas son factibles y acotados.

(b)

Demuestre que si, para todo $y \geq 0$ tal que $A^T y \geq 0$, se tiene $b^T y \geq 0$ entonces existe $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$.

Problema 6

Sean $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$, dados. Probar que

$$(P) \quad \text{mín } \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

donde $\varphi(x) = \text{máx}\{c_1^T x + b_1, \dots, c_k^T x + b_k\}$, es equivalente a un problema de programación lineal.

Problema 7

Demuestre que $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es lineal afín ($f(x) = \alpha^T x + \beta$) si y sólo si f es cóncava y convexa.

Problema 8

Sea S un conjunto convexo no vacío de \mathbb{R}^n . Pruebe que:

$$(i) \quad f(y) = \inf\{\|x - y\| / x \in S\}$$

$$(ii) \quad g(y) = \sup\{y^T x / x \in S\}$$

son convexas.

Problema 9

Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \ln(x_j) - \sum_{j=1}^n x_j \ln\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)$$

es convexa sobre el conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \sum_{j=1}^n x_j = \alpha, \quad x_j > 0\}$$

$\alpha > 0$ fijo.

Problema 10

Considere $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, convexa y diferenciable, A matriz de $m \times n$ y de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &Ax \leq b \end{aligned}$$

Sea \bar{x} factible y:

$$(Q) \quad \text{mín } \|\eta_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \eta_i A_i^t\|^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} \eta_i &= 1 \\ \eta_i &\geq 0 \quad \forall i \in I_0 \end{aligned}$$

donde $I = \{i / A_i \bar{x} = b_i\}$, $I_0 = I \cup \{0\}$, siendo A_i la fila i de A.

Demuestre que (Q) es un problema convexo (es decir, función objetivo y región factible convexas).