

Pauta P2:

- i)  $0 \in T_S(x_0)$ , basta tomar  $d_k = 0, t_k \rightarrow 0, t_k > 0$  arbitrario (p. ej.:  $\frac{1}{k}$ )  
 ii) Sean  $d \in T_S(x_0), \alpha > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exists d_k \rightarrow d, \exists t_k \rightarrow 0, t_k > 0; x_0 + t_k d_k \in S \quad \forall k \\ & \text{Tomando } d'_k = \alpha d_k \rightarrow \alpha d \text{ y } t'_k = \frac{t_k}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ se tiene } x_0 + t'_k d'_k = x_0 + t_k d_k \in S \quad \forall k \\ & \Rightarrow \alpha d \in T_S(x_0) \end{aligned}$$

- iii) Sea  $d^k \rightarrow d$ , con  $\{d^k\} \subseteq T_S(x_0)$   
 Luego,  $\forall k, d^k \in T_S(x_0) \Leftrightarrow \forall k, \exists d_n^k \rightarrow d^k, \exists t_n^k \rightarrow 0, t_n^k > 0 \text{ t. q.}$   
 $x_0 + t_n^k d_n^k \in S \quad \forall n$

Ocupando argumento diagonal podemos encontrar dos sucesiones  $\{d_{n(k)}^k\}, \{t_{n(k)}^k\} \text{ t. q.}$

$$d_{n(k)}^k \rightarrow d, t_{n(k)}^k \rightarrow 0, t_{n(k)}^k > 0 \text{ y } x_0 + t_{n(k)}^k d_{n(k)}^k \in S \quad \forall k$$

$$\text{En efecto, } \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ t. q. } \|d^k - d\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \exists n(k) \text{ t. q. } \|d_{n(k)}^k - d^k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\Rightarrow \|d_{n(k)}^k - d\| \leq \varepsilon), \text{ donde se tiene } t_{n(k)}^k \rightarrow 0, t_{n(k)}^k > 0 \text{ y } x_0 + t_{n(k)}^k d_{n(k)}^k \in S$$

Así  $d \in T_S(x_0)$ , luego  $T_S(x_0)$  es cerrado

- iv)  $T_S(x_0) = \{d / \exists d_n = (d_n^1, d_n^2)^T \rightarrow d, t_n \rightarrow 0, t_n > 0; x_0 + t_n d_n \in S$   
 $= \{d / \exists d_n = (d_n^1, d_n^2)^T \rightarrow d, t_n \rightarrow 0, t_n > 0; d_n^1 = 0 \text{ o } d_n^2 = 0\}$   
 $= \{d / \exists d_n = (d_n^1, d_n^2)^T \rightarrow d, t_n \rightarrow 0, t_n > 0; d_n \in S\}$

Luego, si  $d \in T_S(x_0)$  entonces  $d \in S$  ( $S$  cerrado). Si  $d \in S$  entonces  $d \in T_S(x_0)$ , basta tomar

$d_n = d$  y  $t_n \rightarrow 0, t_n > 0$  cualquiera. Así  $T_S(x_0) = S$ .