

Guía N° 2 de Optimización MA37A/Prof: Jorge Amaya

Auxiliares: Raul Aliaga, Roberto Cortez, Rodrigo Lopez

Jueves 21 de Abril del 2005

KKT, Farkas y Dualidad ¹

Problema 1

Considere el problema:

$$\text{mín } -2x_1 - 6x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Determine si $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1)$ es o no solución. Repita para el vector $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, 0)$.

Problema 2

a) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, donde A es matriz de $m \times n$, de rango m . Demuestre que S posee al menos una dirección extrema, si y sólo si S es no acotado.

b) Demuestre que si el problema:

$$\text{mín } c^t x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

es no acotado, entonces no existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y \leq c$

c) Sean A matriz $p \times n$ y B matriz $q \times n$. Demuestre que uno y sólo uno de los siguientes tienen solución

$$(I) \quad Ax < 0 \quad Bx = 0$$

¹La clasificación de los ejercicios, es **¡tentativa!**.

$$(II) \quad A^T u + B^T v = 0 \quad u \neq 0, u \geq 0$$

d) Demuestre que, si para todo $y \geq 0$ tal que $A^t y \geq 0$ se tiene $b^t y \geq 0$, entonces existe $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$.

Problema 3

Demuestre que el problema:

$$(PQ) \quad \min \quad \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

con Q matriz de $n \times n$ simétrica, definida positiva, y A matriz de $m \times n$, es equivalente a resolver:

$$(PC) \quad \text{Encontrar } w, z \in \mathbb{R}^{m+n} \quad \text{tales que}$$

$$w - Mz = q$$

$$w^t z = 0$$

$$w, z \geq 0$$

donde $q^t = (b^t, c^t)$. Dar explícitamente M .

Problema 4

a) Sea $A \in M_{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Muestre que exactamente uno de los siguientes sistemas tiene una solución:

$$Ax = c$$

$$A^t y = 0 \quad c^t y = 1$$

b) Sea $A \in M_{m \times n}$. Muestre que los siguientes dos sistemas tienen soluciones \bar{x} e \bar{y} tal que $A\bar{x} + \bar{y} > 0$:

$$Ax \geq 0$$

$$A^t y = 0 \quad y \geq 0$$

Problema 5

Considere el siguiente problema, en donde A es una matriz de $m \times n$:

$$(P) \quad \text{mín } c^t x$$

$$s.a : \quad Ax = b, x \geq 0$$

y sea x^* una solución óptima.

a) Suponga que $x_1^*, \dots, x_p^* > 0$ y $x_j^* = 0$ para $j = p+1, \dots, n$. Demuestre que el sistema:

$$Ad = 0$$

$$c^t d < 0$$

$$d_{p+1}, \dots, d_n \geq 0$$

no tiene solución.

b) Demuestre, usando el teorema de Farkas, que existe un vector w tal que:

$$A^t w \leq c$$

$$(c - A^t w)^t x^* = 0$$

Problema 6

Utilice el teorema de KKT para estudiar los siguientes problemas y sus posibles soluciones propuestas:

a)

$$\text{mín } -x_1 + 2x_2$$

$$-(1 - x_1)^3 + x_2 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

con la solución $\bar{x}^t = (1, 0)$.

b)

$$\text{mín } -x_1 - x_2$$

$$x_1^2 + x_2 - 1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

con las soluciones $\bar{x}^t = (1, 0)$, $\bar{x}^t = (0, 1)$.

c)

$$\text{mín } -x_1 + x_2$$

$$x_1^2 + x_2 - 1 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 + 1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

con la solución $\bar{x}^t = (1, 0)$.

Simplex y Dualidad²

Problema 7

Use el método Simplex para resolver el problema:

$$\text{mín } x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6$$

$$x_1 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

¿Es única la solución?

Problema 8

Considere el problema:

$$(P) \quad \text{mín } x_1 + x_2$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

²Ver nota a pie de página en primera página.

Use el método Simplex (en sus dos fases) para resolver esta problema.

- Si no hay solución factible, explique como se pone en evidencia ese hecho.
- Si hay solución óptima, indique cuál es, y si es única.
- Si el problema es no acotado, indique una dirección extrema sobre la cual la función objetivo decrece monotonamente a $-\infty$. (Justifique).

Problema 9

Demuestre que $\bar{x} = (0, 1, 2, 3, 0)^t$ es solución óptima del siguiente problema (P):

$$(P) \quad \text{máx} \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 \leq 35$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_5 \leq 1$$

$$2x_3 - 2x_5 \leq 4$$

$$3x_1 + x_4 + x_5 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Encuentre además una solución óptima del dual de (P).

Problema 10

Considere

$$(P_\lambda) \quad z(\lambda) = \text{mín} \quad 2x_1 + \lambda x_2$$

$$-4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 16$$

$$x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Resuélvalo para $\lambda = 0$ e indique el valor óptimo $z(0)$.

b) Grafique $z(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 11

a) Para el problema (P), escrito en forma canónica, se llega al siguiente cuadro:

$$\begin{array}{ccccc|c}
\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -100 \\
-2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
\alpha_2 & 0 & \alpha_4 & 1 & 0 & 4 \\
\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_5
\end{array}$$

¿Cuáles son las condiciones para:

- i) La solución en curso es óptima (índiquela).
- ii) El problema es no acotado.
- iii) La solución en curso es óptima, pero no es única (itere para indicar otra solución).

b) Sea $(P) : \min f(x), c \in \Omega$, en que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, es convexa. Demostrar que si $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ son soluciones de (P) entonces cualquier punto de $co\{x_1, \dots, x_k\}$ es solución de (P) .

Problema 12

Considere

$$(P) \quad \min x_1 + x_2 + x_3 - x_4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- i) Se propone una solución sólo con x_4 en la base (x_1, x_2, x_3 fuera de la base). ¿Es factible? ¿Es óptima?.
- ii) Se propone una solución sólo con x_2, x_4 en la base (x_1, x_3 fuera de la base). ¿Es factible? ¿Es óptima?.
- iii) Escriba el dual de (P) y deduzca una solución óptima.

Problema 13

Considere el problema:

$$(P_\alpha) \quad \min \alpha x_1 + x_3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

a) Resuélvalo, indicando el conjunto solución:

$$\Psi(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es solución de } (P_\alpha)\}$$

para cada $\alpha \in [-1, 1]$.

b) Grafique $Z(\alpha)$, el **valor** óptimo, para $\alpha \in [-1, 1]$.

Problema 14

Considere las funciones $f_i : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ convexas y diferenciables y sea $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$. Considere además el problema:

$$(P) \quad \min f(x)$$

$$x \geq 0$$

a) Demuestre que todo mínimo local de (P) es un mínimo global.

b) Demuestre que el problema (P) es equivalente al problema:

$$(P') \quad \min t$$

$$\begin{aligned} f_i(x) &\leq t \quad i = 1, \dots, k \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

en el sentido que una solución de (P) permite deducir de forma trivial una solución de (P') y viceversa.

c) Sean \bar{x} mínimo de (P) e $I = \{i = 1, \dots, k / f_i(\bar{x}) = f(\bar{x})\}$. Demuestre que existen $u_i \geq 0$, $i \in I$ y $v \in \mathbb{R}_+^n$, tales que:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} u_i \nabla f_i(\bar{x}) &= v \\ \sum_{i \in I} u_i &= 1 \\ \bar{x}^t v &= 0 \end{aligned}$$

d) Para el caso en que $k = n = 2$, $f_1 = -1 + x_1 + x_2$ y $f_2(x) = 1 - x_1$, resuelva el problema (P) usando el algoritmo Simplex con sus dos fases. Determine u y v para este caso.

Problema 15

Considere el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } 2x_1 + x_2 \\ & -4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 16 \\ & x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Escriba el problema Dual asociado.

b) Resuelva el problema primal, usando el algoritmo de simplex dual.

Problema 16

Aplicando el método de simplex dual, a la siguiente tabla para maximizar z con variables no negativas, x_1, \dots, x_5 :

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & -5 & -6 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 8 & 9 \end{array}$$

¿Es este problema factible? ¿Que puede usted decir? (¿o hacer ?).

Análisis Post-Optimal³

Problema 17

Considere el siguiente Problema (P)

$$(P) \quad \text{máx } 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

³Ver nota a pie de página en primera página.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

a) Pruebe que el método simplex aplicado a (P) nos entrega el siguiente cuadro final:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 9 & 0 & 11 & \frac{1}{2} & 294 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 6 \end{array}$$

b) Supongamos ahora que los costos son perturbados de manera que $c_1 = 6 + \theta$, $c_2 = 14 + 2\theta$, $c_3 = 13 + 2\theta$. Grafique el valor óptimo z del problema (P) , en función de θ , dentro del rango para el cual la base óptima no cambia.

Problema 18

Considere el siguiente problema (P)

$$(P) \quad \text{mín} \quad -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

- Resuelva (P) por el método simplex, dando además la solución del problema dual.
- Suponga que los costos $c_2 = 1$ y $c_3 = -1$ se modifican a $\bar{c}_2 = -8$ y $\bar{c}_3 = 10$. Determine si la base óptima cambia. Encuentre una nueva solución de los problemas Primal y Dual.
- Repita lo mismo de la parte anterior con $\bar{c}_2 = -3$ y $\bar{c}_3 = 1$.
- Suponga que el lado derecho de (P) se modifica a $\bar{b}^t = (3, -4)$. Determine si la base óptima cambia. Encuentre la nueva solución óptima de los problemas Primal y Dual.
- Suponga que en (P) , la segunda columna de la matriz A (es decir, $a_2^t = (1, 2)$) se cambia por $\bar{a}^{2^t} = (2, 5)$. Determine si la base óptima cambia. Encuentre la nueva solución óptima de los problemas Primal y Dual.

Problema 19

Considere:

$$(P) \quad \text{máx} \quad 9x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6$$

$$\begin{aligned}
5x_2 + 50x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\
x_1 - 15x_2 + 2x_3 &= 2 \\
x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Escriba el problema dual (D) correspondiente.
- Resuelva (P) e indique la solución de (D) (o viceversa).
- Resuelva (P), pero suponiendo que el coeficiente de x_5 en la función objetivo es $c_5 = 1$ (en lugar de -2).
- Suponga que al problema (P) (original) se le modifica el recurso b_1 de manera que $b_1 = 10\alpha$ ¿Para que valores de α la base óptima no cambia ?.
- ¿Que sucede si al problema (P) se le agrega la variable x_7 , con costo $c_7 = 1$ y vector columna $(0, -1, 0)^t$?
- ¿Que sucede si a (P) se le agrega la restricción $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq \beta$? Analice en función de β .

Problema 20

Considere el problema lineal:

$$(P) \quad \text{mín } z = 5x_1 - 3x_2$$

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Dado el siguiente cuadro óptimo:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1
\end{array}$$

¿cuál es la solución del problema dual?

b) Escriba B , matriz de base (óptima) y B^{-1} .

c) Si z cambia a $z' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3$. ¿cuál es el conjunto de soluciones óptimas?

d) Si b cambia a $b'^t = (5, 4, 1)^t$ (en el problema original), ¿cuál es el conjunto de soluciones óptimas?

e) Si se introduce (al problema original) una nueva actividad u , cuya columna correspondiente es $(-1, -3, 1)^t$, ¿cuál es la nueva solución óptima?

f) Si se agrega (al problema original) la restricción

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

¿cuál es la nueva solución óptima?

Problema 21

Considere el problema lineal:

$$(P) \quad \text{mín } c^t x$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & : \quad Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

y suponga que tanto el primal como el dual son factibles. sea \bar{y} una solución óptima conocida del dual.

(a) Denotemos por $(P1)$ el problema que resulta de multiplicar la k -ésima ecuación de (P) por $\lambda \neq 0$.

(i) Demuestre que si \bar{x} es solución óptima de (P) entonces es también solución de $(P1)$

(ii) Encuentre una solución óptima del dual de $(P1)$.

(b) Denotemos por $(P2)$ el problema que resulta de agregar λ veces la k -ésima fila de A a c .

(i) Demuestre que si \bar{x} es solución óptima de (P) entonces es también solución de $(P2)$.

(ii) Calcule los costos reducidos de la tabla óptima del problema $(P2)$.

(iii) Encuentre una solución óptima del dual de $(P2)$.