

## Pauta P2C1 MA37A

(a) (Total: 3 pt.)

i) 2 pt.

$$f(y) = \inf \{ \|x - y\| \mid x \in S \}$$

p.d.q.  $f$  es convexa, es decir:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Sean entonces  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ , y  $\bar{x} \in S$  arbitrario, se tiene:

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2\| &\leq \|\bar{x} + \lambda\bar{x} - \lambda\bar{x} - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2\| \\ &= \|(1 - \lambda)\bar{x} - (1 - \lambda)x_2 - \lambda(\bar{x} - x_1)\| \\ &\leq (1 - \lambda) \|\bar{x} - x_2\| + \lambda \|\bar{x} - x_1\| \end{aligned}$$

como  $\bar{x} \in S$  es arbitrario:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= \inf_{\bar{x} \in S} \|\bar{x} - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2\| \\ &\leq \inf_{\bar{x} \in S} ((1 - \lambda) \|\bar{x} - x_2\| + \lambda \|\bar{x} - x_1\|) \\ &\leq \inf_{\bar{x} \in S} (1 - \lambda) \|\bar{x} - x_2\| + \inf_{\bar{x} \in S} \lambda \|\bar{x} - x_1\| = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

**Observación:** Si sólo se considera  $x_1, x_2 \in S$  el resultado es trivial ya que  $f(y) = 0 \quad \forall y \in S$  así que en éste caso el puntaje máximo es **1 pt.**

ii) 1pt.

$$g(y) = \sup \{ y^t x \mid x \in S \}$$

Nuevamente se debe demostrar que  $g$  es convexa, i.e.:

$$g(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda g(y_1) + (1 - \lambda)g(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Sean entonces  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$ , desarrollando:

$$\begin{aligned} g(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) &= \sup_{x \in S} (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)^t x \\ &= \sup_{x \in S} (\lambda y_1^t x + (1 - \lambda)y_2^t x) \\ &\leq \sup_{x \in S} \lambda y_1^t x + \sup_{x \in S} (1 - \lambda)y_2^t x = \lambda g(y_1) + (1 - \lambda)g(y_2) \end{aligned}$$

**Observación:** Si sólo se considera  $y_1, y_2 \in S$  el resultado es trivial ya que  $g(y) = \|y\| \quad \forall y \in S$  así que en éste caso el puntaje máximo es **0.5 pt.**

(b) (Total: 3 pt.)

i) **1.5 pt.** Demostrar que **(F)** y **(P)** son equivalentes, con:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(F) mín} & \frac{x_2-6}{x_1+x_2+2} \\
 \text{s.a} & -x_2 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(P) mín} & y_2 - 6z \\
 \text{s.a} & -y_1 + y_2 - 3z \leq 0 \\
 & y_1 + 2y_2 - 12z \leq 0 \\
 & y_1, y_2, z \geq 0 \\
 & y_1 + y_2 + 2z = 1
 \end{array}$$

De la última ecuación de **(P)** se debe definir:

$$z = \frac{1}{x_1 + x_2 + 2}, \quad y_1 = \frac{x_1}{z}, \quad y_2 = \frac{x_2}{z}$$

Para tener todo el puntaje se debe reemplazar explícitamente el valor de  $y_1, y_2$  y  $z$  en cada una de las restricciones de **(P)**, comprobando que equivale a la correspondiente (la que está al lado) ecuación de **(F)**, lo mismo para las funciones objetivo, por ejemplo para la positividad:

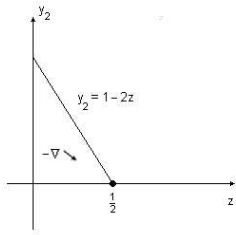
$$x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow z > 0, \text{ luego como } y_1 = \frac{x_1}{z}, \quad y_2 = \frac{x_2}{z} \Rightarrow y_1, y_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2, z \geq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \geq 0 \text{ pues } x_1 = y_1 z, \quad x_2 = y_2 z \quad \text{y entonces:}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow y_1, y_2, z \geq 0$$

(-0.3 pt. por cada equivalencia que no se demuestra.)

ii) **1.5 pt.** Slo  $y_2$  participa en la fn. objetivoc( $y_2, z$ ) =  $y_2 - 6z$ , así que graficamos el plano  $y_2, z$  : En éste caso  $-\nabla c = (6, -1)$ , y el óptimo se alcanza en  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Voviendo al problema **(F)** estos valores corresponden a  $x = (0, 0)$



## Pauta P2C2 MA37A

i) (Total: **3 pt.**)

a) **1 pt.** Para el problema:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}) \quad & \text{mín} \quad f(x) \\ & s.a \quad Ex \leq d \\ & \quad Ax = b \\ & \quad x \in X\end{aligned}$$

Se define:

$$\theta(u, v) = \inf_{x \in X} \{f(x) + u^t(Ex - d) + v^t(Ax - b)\}$$

Se pide explicitar  $\theta(u, v)$  para el caso particular:

$$f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2, \quad Ex = x_1 + 2x_2 - 3, \quad d = 0, \quad X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Como no hay restricciones de igualdad,  $\theta$  no depende de  $v$ , luego reemplazamos y obtenemos:

$$\theta(u) = \inf_{x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}} \{-x_1 - x_2 + u(x_1 + 2x_2 - 3)\} = \inf_{x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}} \{x_1(1 - u) + x_2(2u - 1)\}$$

(La mayoría sólo desarrolló hasta aquí: **0.5 pt.**) Pero con explicitar nos referimos a encontrar el ínfimo, que se alcanza pues el conjunto es finito.

Se debe considerar varios casos, dependiendo de los signos de  $(1 - u)$  y  $(2u - 1)$ :

$0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ : En este caso :

$(1 - u) \geq 0, \quad (2u - 1) \leq 0$  luego el ínfimo se alcanza en  $x_1 = 0, x_2 = 4$  y:

$$\theta(u) = 4(2u - 1) - 3u$$

$\frac{1}{2} \leq u \leq 1$ : En este caso :

$(1 - u) \geq 0, \quad (2u - 1) \geq 0$  luego el ínfimo se alcanza en  $x_1 = 0, x_2 = 0$  y:

$$\theta(u) = -3u$$

$1 \leq u$ : En este caso :

$(1 - u) \leq 0, \quad (2u - 1) \geq 0$  luego el ínfimo se alcanza en  $x_1 = 4, x_2 = 0$  y:

$$\theta(u) = 4(1 - u) - 3u$$

**(0.2** por cada caso)

**b) 1 pt.** Si  $x$  es factible en **(P)** :

$$Ex - d \leq 0 \text{ y } Ax - b = 0 \Rightarrow u^t(Ex - d) \leq 0 \text{ pues } u \in \mathbb{R}_+^l$$

luego  $\forall x$  factible:

$$\theta(u, v) = f(x) + \underbrace{u^t(Ex - d)}_{\leq 0} + \underbrace{v^t(Ax - b)}_{= 0} \leq f(x)$$

con lo que concluimos pues:

$$\begin{aligned} \theta(u, v) &= \inf_{x \in X} \{f(x) + u^t(Ex - d) + v^t(Ax - b)\} \\ &\leq \inf_{x \text{ factible}} \{f(x) + u^t(Ex - d) + v^t(Ax - b)\} \\ &\leq f(x) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

**c) 1 pt.** Suponemos:  $\sup_{\mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}^m} \theta(u, v) = +\infty$

Si  $\exists \bar{x}$  factible para **(P)**  $\Rightarrow f(\bar{x}) < +\infty$  y entonces:

$$\sup_{\mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}^m} \theta(u, v) \leq f(\bar{x}) < +\infty$$

lo que contradice la hipótesis, luego si  $\theta(u, v)$  es no acotado  $\Rightarrow$  **(P)** es infactible.

**ii) (Total: 3 pt.)**

**a) 1 pt.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}) \text{ mín } & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Primero agregamos avriables de holgura:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}) \text{ mín } & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad i \in \{1 \dots 5\} \end{aligned}$$

Comenzamos a iterar con las variables de holgura en la base:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 & \\
 -1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 4 & \text{( entra } x_2) \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc|c}
 -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 & \\
 \boxed{2} & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & \text{( entra } x_1) \\
 -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 20 & \\
 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \\
 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 6 & \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 4 & 
 \end{array}$$

Encontramos el óptimo :  $x = (2, 6)$   
y el valor de la función objetivo es -20.

**b) 1 pt.** Escribimos el dual(**0.2 pt**):

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{D}) \quad & \text{máx} \quad 8y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\
 & y_1 - y_2 + y_3 \leq -1 \\
 & y_1 + y_2 \leq -3 \\
 & y_i \geq 0 \quad i \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

Podemos aplicar Simplex dual, o usar la holgura complementaria: Las variables de holgura de  $(\mathbf{D})$  deben ser 0, luego se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_1 - y_2 + y_3 &= -1 \\
 y_1 + y_2 &= -3 \\
 \text{con } y_3 &= 0, \text{ luego:} \\
 y_1 - y_2 &= -1 \\
 y_1 + y_2 &= -3 \\
 \Rightarrow 2y_1 &= -4 \\
 y_2 &= -1
 \end{aligned}$$

Con lo que el óptimo dual se alcanza en  $(-2, -1)$ , podemos corroborar que la función objetivo vale  $-20$  en  $(-2, -1)$ .

c) **1 pt.** Se pide graficar la función:

$$\begin{aligned} z(\alpha) = \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq \alpha \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para graficar la función se debe resolver el problema en función de  $\alpha$ , en análisis comienza con el cuadro:

$$\begin{array}{cccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad (1)$$

Si  $\alpha < 0 \Rightarrow$  el problema es infactible ya que  $x_1, x_2 \geq 0$  y  $x_1 + x_2 \leq \alpha$ , luego  $z(\alpha)$  no está definido en  $\mathbb{R}_-$ . También se deduce que  $\alpha = 0 \Rightarrow z(\alpha) = 0$ . Se considera entonces  $\alpha > 0$ .

- ( $0 < \alpha < 4$ ) Se itera una vez para llegar al cuadro:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3\alpha \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 - \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Observar que es factible pues  $4 - \alpha \geq 0$ , luego en este caso la solución es:  $z(\alpha) = -3\alpha$ .

- ( $4 \leq \alpha$ ) Iteramos desde el cuadro (1):

$$\begin{array}{cccccc} -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha - 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 12 + 2(\alpha - 4) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\alpha - 4}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4 + \frac{\alpha - 4}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha - 4}{2} & \frac{\alpha - 4}{2} & 1 & 6 - \frac{\alpha - 4}{2} \end{array}$$

El cuadro es óptimo si  $\alpha \leq 16$ . Para el caso  $\alpha > 16$  iteramos desde (2)

$$\begin{array}{cccccc} -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha - 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 36 \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha - 16 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 10 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6
\end{array}$$

En resumen la función  $z(\alpha)$  tiene la forma:

$$z(\alpha) = \begin{cases} -3\alpha & 0 \leq \alpha \leq 4 \\ -4 - 2\alpha & 4 \leq \alpha < 16 \\ -36\alpha & \geq 16 \end{cases}$$

