Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403
Probabilidades y Estadística
Primavera 2013

Guía ejercicios 4

1. Se lanza una moneda 25 veces, obteniendo la siguiente secuencia:

$$SSCCCSCCSSCSSCCSCCSCSSSCC.$$

Aproximando con el TCL, obtenga un intervalo de confianza al 90 %, para la probabilidad p de obtener cara en un lanzamiento.

2. El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (i.e., la raíz del estimador insesgado de la varianza) es de 50. Asumiendo que el puntaje tiene distribución normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

3. En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26.$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.

4. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con S^2 igual a 0,9.
   a) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para μ.
   b) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para σ^2.
   c) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?
   d) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

5. Considere una variable aleatoria X con densidad dada por $f_X(x) = Cxe^{-x/\theta}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$, donde C y θ son constantes.
   a) Muestre que $C = 1/\theta^2$.
   b) Muestre que $\mathbb{E}(X) = 2\theta$.
   c) Muestre que $\mathrm{var}(X) = 2\theta^2$.
   d) Considere una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de X. Calcule el estimador de máxima verosimilitud de θ, y muestre que es insesgado.
   e) Suponga que el valor del estimador máximo verosímil $\hat{\theta}$ obtenido en una muestra de tamaño $n = 50$ es de 10,0. Obtenga un intervalo de confianza para θ al nivel 5 %. *Indicación:* aproxime utilizando el hecho que la cantidad $(\bar{X} - 2\theta)/(\hat{\theta}\sqrt{2/n})$ converge en distribución a una normal estándar cuando $n \to \infty$ (demuestre esta afirmación).

6. Para una distribución normal con esperanza μ y varianza $\sigma^2 = 25$, se desea realizar un test de las hipótesis $H_0 : \mu = 10$ versus $H_1 : \mu = 5$. Encuentre el tamaño n de la muestra tal que el test más potente tenga $\alpha = \beta = 0{,}025$, donde α y β son la probabilidad del error de tipo I y II, respectivamente.

7. Se dispone de una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ desconocido. Sean $\alpha = 5\,\%$, $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ valores dados. Se plantean las hipótesis

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$
$$H_1 : \lambda = \lambda_1,$$

   a) Muestre que el test más potente tiene región de rechazo de la forma $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \textsc{Cte}\}$. ¿Es uniformemete más potente entre todos los tests tales que $\lambda_1 > \lambda_0$?
   b) Escriba esta región de rechazo de la forma

$$R = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\bar{x} - 1/\lambda_0}{1/(\lambda_0\sqrt{n})} \leq c \right\},$$

   donde c es una constante. Aproximando con un teorema adecuado, mueste que el valor de c tal que la probabilidad del error tipo I es igual al α especificado, corresponde a $c = -1{,}65$.
   c) De aquí en adelante suponga que $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ y $n = 25$. Nuevamente aproximando con un teorema adecuado, calcule la potencia del test del ítem anterior.
   d) Suponga que el promedio observado en la muestra es 0,6. Aproximando nuevamente, calcule el p-valor del test. ¿Debe o no rechazarse H_0?

8. El voltaje de salida de un cierto circuito eléctrico debería ser 130 de acuerdo a las especificaciones técnicas. Se toma una muestra de 40 mediciones independientes del voltaje de este circuito, y se obtiene un promedio de 128,6 y una desviación estándar (es decir, la raíz del estimador insesgado de la varianza) de 2,1. Realice un test a nivel 5 % para la hipótesis de que la esperanza del voltaje es igual a 130 versus la alternativa de que es menor estricto que 130. ¿Cuál es el p-valor del test?

9. Una empresa fabrica ciertas piezas cuyo grosor debería ser de 7cm. Debido a pruebas realizadas sobre la producción, existe la sospecha de que la máquina que produce las piezas esté defectuosa, haciendo que estas tengan un menor grosor del deseado. Suponga que se obtiene una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_{25}$ de los grosores de estas piezas, tal que $\sum X_i = 172{,}508$ y su varianza muestral insesgada es $s^2 = 0{,}04$. Asuma además que el grosor de una pieza es una v.a. normal. Realice un test de hipótesis y calcule el p-valor. Indique su conclusión para un nivel de significación de $\alpha = 5\,\%$.

10. Una conocida marca de alimentos afirma que sus cajas de cereales contienen 50gr de almendras en esperanza, pero usted sospecha que contienen estrictamente menos. Para verificar su afirmación, usted cuidadosamente separa las

almendras de 9 cajas de cereales, y al pesarlas obtiene 49gr, 51gr, 46gr, 49gr, 51gr, 48gr, 51gr, 46gr y 50gr. Suponga que la variable en consideración tiene distribución normal con ambos parámetros desconocidos.

a) Calcule el p-valor del test que resuelve su sospecha. Para un nivel de confianza del 5 %, ¿qué se puede concluir?

b) En la caja de cereales se especifica que la raíz de la varianza de la cantidad de almendras es de 4gr, pero usted nuevamente sospecha que es estrictamente menor. ¿Cuál es el p-valor del test correspondiente? ¿Qué se concluye si se usa un nivel de confianza del 5 %?

11. Se afirma que el 2 % de los conductores olvida su licencia de conducir. Se toma una muestra de 100 conductores, y se observa que todos portan su licencia.

a) ¿Cuál es el p-valor del test que contrasta la afirmación con la hipótesis de que menos del 2 % de los conductores olvidan su licencia?

b) Para $\alpha = 2{,}28\,\%$, ¿cuál es la máxima cantidad de conductores adicionales que portan su licencia tal que la afirmación no se rechaza?

12. Una autopista posee 4 pistas, y se desea investigar si los conductores tienen preferencia por alguna de ellas. Se observó la autopista por la que transitaron 1000 automóviles, y los resultados se resumen en la siguiente tabla. ¿Hay suficiente evidencia para decir que algunas pistas son preferidas sobre otras? Use $\alpha = 0{,}05$.

Pista	Cantidad observada
1	294
2	276
3	238
4	192

13. La cantidad de accidentes sufridos por maquinistas de una cierta industria se observó durante un periodo de tiempo, y los resultados se muestran en la siguiente tabla. Realice un test a nivel 5 % sobre la hipótesis de que los datos provienen de una distribución de Poisson.

Accidentes por maquinista	Cantidad de maquinistas
0	296
1	74
2	26
3	8
4	4
5 ó mas	6

14. *a*) Considere una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una variable $\mathrm{bin}(m, p)$, con m conocido y p desconocido. Muestre que los estimadores de p de máxima verosimilitud y de los momentos coinciden con $\hat{p} = \bar{X}/m$. Muestre que es insesgado y que converge casi seguramente a p cuando $n \to \infty$.

En un centro comercial hay 3 tiendas de la misma cadena, y se desea investigar la forma en que los clientes deciden entrar o no entrar en cada una de ellas. Se propone el siguiente modelo: cada cliente decide entrar a una tienda con probabilidad p (desconocida), y decide no entrar con probabilidad $1-p$, independiente de las otras dos tiendas y del resto de los clientes. Se le hace un seguimiento a $n = 64$ clientes, cuyos resultados se resumen en la siguiente tabla:

Cantidad de tiendas visitadas	0	1	2	3
Cantidad de clientes	6	30	18	10

b) Muestre que el valor del estimador de máxima verosimilitud de p que se obtiene de acuerdo a los datos es $\hat{p} = 1/2$. Plantee las hipótesis del test de bondad de ajuste para el modelo propuesto, especificando el valor de p_i bajo H_0, para cada $i = 0, 1, 2, 3$.

c) Realice el test y concluya para $\alpha = 10\,\%$.

15. Se dispone de una muestra aleatoria simple $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ de datos provenientes del par de variables (X, Y), donde $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathrm{var}(X) > 0$ son finitas.

a) Argumente que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ y $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ convergen casi seguramente a $\mathbb{E}(XY)$ y $\mathbb{E}(X^2)$, respectivamente, cuando $n \to \infty$.

b) Se ajusta un modelo lineal de la forma $Y \approx a + bX$, el cual se resuelve mediante el criterio de minimizar la suma de residuos al cuadrado, con lo cual se obtienen las cantidades $\hat{a}_n$ y $\hat{b}_n$. Muestre que $\hat{b}_n \to \mathrm{cov}(X, Y)/\mathrm{var}(X)$ y $\hat{a}_n \to \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathrm{cov}(X, Y)/\mathrm{var}(X)$ casi seguramente cuando $n \to \infty$.

16. Considere los siguientes datos:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	1	1	3

a) Ajuste la recta de mínimos cuadrados a los datos.

b) ¿Hay suficiente evidencia para afirmar que la pendiente de la recta ajustada es distinta de 0? Utilice $\alpha = 5\,\%$.

c) Obtenga un intervalo de confianza para la pendiente al nivel 95 %.

17. Existen 4 tamaños predeterminados para un cierto producto. Se desea investigar la posible relación lineal entre la duración del producto y su tamaño, para lo cual se toman muestras de 2 productos por cada tamaño, y se registra su duración y se ajusta la recta de mínimos cuadrados sobre los datos obtenidos.

a) Se realiza el test para decidir si la constante multiplicativa del modelo es distinta de 0. El valor del estadístico correspondiente, bajo la hipótesis nula, es 1,95. ¿Cuál es el p-valor del test? ¿Cuál es la conclusión si se trabaja con $\alpha = 5\,\%$?

b) Sabiendo además que el valor estimado de la constante multiplicativa dio 3,9, calcule un intervalo de confianza de dicha constante al nivel 95 %.