Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403
Probabilidades y Estadística
Primavera 2013

Guía ejercicios 4

1. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Encuentre las densidades marginales de X e Y.
   b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.
   c) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y=y)$.

2. Usted sale de su casa a las 8:00, y debe llegar a la universidad a más tardar a las 8:30. Si usted se siente con energía, viaja en bicicleta, y el tiempo de viaje (en minutos) es una variable uniforme en $[25, 35]$. Si no se siente con energía, usted espera el autobús, que tarda en llegar al paradero un tiempo distribuido uniformemente en el intervalo $[0, 20]$ (independiente del tiempo de viaje en bicicleta), y lo deja en la universidad luego de 25 minutos de viaje. Suponga que la probabilidad de sentirse con energía es $p = 0{,}75$.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que usted llegue a la hora?
   b) Si usted llegó atrasado, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?
   c) Calcule la esperanza de la hora de llegada a la universidad.

3. La cantidad de llamadas telefónicas recibidas en una empresa durante t horas es una variable Poisson(μt). Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. La duración de la falla es una variable exponencial de parámetro λ. Sea X la cantidad de llamadas no atendidas durante la falla.
   a) Utilizando esperanzas condicionales, calcule $\mathbb{E}(X)$.
   b) Para $k = 0, 1, \ldots$, calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Concluya que $X + 1$ es una variable geométrica de parámetro $p = \lambda/(\lambda + \mu)$. Obtenga nuevamente $\mathbb{E}(X)$. *Indicación:* utilice la regla de probabilidades totales; para calcular la integral, construya la densidad de una variable Gamma adecuada.

4. Se lanza n veces de manera independiente una moneda con probabilidad p de cara, donde p es el resultado de la realización de otra variable aleatoria U con distribución unif$(0, 1)$, independiente de los lanzamientos. Sea X la cantidad de caras que se obtienen. Demuestre que para todo $i = 0, \ldots, n$ se tiene que $p_X(i) = \frac{1}{n+1}$. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ condicionando en los posibles resultados de U; utilice sin demostrar el hecho que

$$\int_0^1 p^i(1-p)^{n-i}dp = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}.$$

5. Suponga que usted dispone de una mesa cuadrada, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego, usted lanza n objetos al azar sobre la mesa, y denota c_n la cantidad de ellos que cae dentro del círculo. Muestre que la cantidad $4c_n/n$ converge en probabilidad y casi seguramente a π cuando $n \to \infty$.

6. En una fiesta de año nuevo a la que usted asiste, se lanza al aire una gran cantidad de diminutos papeles blancos y rojos. Los papeles blancos provienen de un contenedor esférico, y los papeles rojos de una caja cúbica, de manera que el diámetro del contenedor esférico es igual a la arista de la caja (ambos poseen igual cantidad de papeles por cm^3). Al llegar a su casa usted se percata que adheridos a su ropa hay b papeles blancos y r papeles rojos. Argumente por qué $6b/r$ es una buena aproximación de π; explicite sus supuestos.

7. Se dispone de un piso de "parquet" con líneas paralelas a distancia $a > 0$. Se lanza una aguja de largo $l < a$ en el piso, de manera tal que la distancia X del centro de la aguja a la línea más cercana es una variable uniforme en $[0, a/2]$, y el ángulo Θ que forma la aguja con el eje perpendicular a las líneas es uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, independiente de X.
   a) Muestre que la aguja queda por sobre una línea si y sólo si $X \leq (l/2)\cos\Theta$.
   b) Muestre que la probabilidad de que la aguja quede por sobre una línea es $2l/(\pi a)$.
   c) Con los elementos descritos, diseñe un procedimiento para aproximar π.

8. Se sabe que el tiempo medio de espera de la micro es de 5 minutos.
   a) Entregue una cota superior para la probabilidad de que la micro demore más de 15 minutos.
   b) Estudios posteriores publicados por las autoridades de transporte revelan que la raíz de la varianza del tiempo de espera es de 3 minutos. Con esta información adicional, entregue una nueva cota para la probabilidad de la parte anterior.
   c) Usted espera la micro todos los días durante 36 días. Durante la espera, usted escucha la discografía de su grupo favorito, que dura exactamente 168 minutos, siempre retomándola en el instante en que la dejó el día anterior. ¿Cuál es la probabilidad que usted no alcance a terminar la discografía? Utilice el TCL.

9. Un astrónomo quiere conocer la distancia d (en años luz) que hay desde la Tierra a una lejana estrella. Para medir esta distancia el astrónomo dispone un instrumento adecuado, pero debido a variaciones en las condiciones atmosféricas, el valor obtenido en cada medición no corresponde a la distancia exacta, sino a una variable aleatoria con esperanza d y varianza 4. Por esta razón, el astrónomo planea tomar n mediciones independientes, y estimar d usando el promedio. ¿Cuál es el mínimo valor de n tal que, con probabilidad de al menos un 95 %, su estimación tiene un error de a lo más $\pm 0{,}5$ años luz? Obtenga un resultado utilizando la desigualdad de Chebyshev, y otro aproximando con el TCL.

10. Se dispone de 100 ampolletas cuyas duraciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media de 5 horas y varianza de 25. Suponga que al acabarse una ampolleta ésta es inmediatamente reemplazada por otra. Sea Y la variable correspondiente al tiempo que transcurre desde que se prende la primera ampolleta hasta que se termina la última.

    a) Muestre que Y tiene valor esperado igual a 500. Con esto, obtenga una cota para la probabilidad de que después de 525 horas aún haya al menos una ampolleta funcionando.

    b) Muestre que Y tiene raíz de la varianza igual a 50. Utilice esto para obtener una cota para la probabilidad de que se acaben las ampolletas entre las horas 400 y 600.

    c) Utilizando el TCL, obtenga una aproximación de la probabilidad de la parte (a).

    d) Suponga que se compran 50 ampolletas adicionales de otra marca, cuyas duraciones son variables aleatorias idénticamente distribuidas con media de 3 horas y varianza 22, independientes entre sí y de las ampolletas anteriores. Si estas ampolletas comienzan a utilizarse cuando se acaban las 100 primeras, ¿cuál es la probabilidad de que después de 700 horas aún haya al menos una ampolleta funcionando? Utilice el TCL.

11. Sea X variable aleatoria binomial con parámetros n y p.

    a) Sean $\hat{p}_1 = X/n$ y $\hat{p}_2 = (X+1)/(n+2)$ estimadores de p. Calcule $\mathrm{ECM}(\hat{p}_1)$ y $\mathrm{ECM}(\hat{p}_2)$. ¿Para qué valores de p es mejor $\hat{p}_2$ de acuerdo al criterio del error cuadrático medio?

    b) Sea $\hat{\sigma}^2 = X(1 - X/n)$ un estimador de $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$. Muestre que $\hat{\sigma}^2$ es sesgado y modifíquelo para obtener un estimador insesgado de σ^2.

12. El tiempo que transcurre entre cada llamada recibida en una central de atención telefónica sigue una distribución exponencial de parámetro λ desconocido. Se toma una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de estos tiempos.

    a) Obtenga un estimador para λ usando el método de máxima verosimilitud.

    b) Muestre que este estimador convergen casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con distribución común $\mathrm{Poisson}(\lambda)$. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, calcule su esperanza y varianza, y muestre que este estimador es consistente.

14. Suponga que $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de un cierto parámetro θ. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Pruebe que $g(\hat{\theta})$ es el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$.

15. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una distribución con densidad dada por $f(x) = rx^{r-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, donde $r > 0$ es un parámetro desconocido. Encuentre un estimador para r usando el método de máxima verosimilitud.

16. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una $\mathrm{Gamma}(\theta, \lambda)$, donde $\theta > 1$ es conocido.

    a) Muestre que el estimador de λ del método de máxima verosimilitud es $\hat{\lambda} = \theta/\overline{X}$.

    b) Concluya que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

    c) Muestre que la esperanza de $\hat{\lambda}$ es $\lambda n\theta/(n\theta - 1)$ y modifíquelo para obtener un estimador insesgado $\tilde{\lambda}$. Suponiendo $\theta > 2$, calcule la varianza de $\tilde{\lambda}$ y muestre que es un estimador consistente. *Indicación:* utilice el hecho que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución $\mathrm{Gamma}(n\theta, \lambda)$.

17. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con densidad común dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    Encuentre un estimador $\hat{\theta}$ mediante el método de máxima verosimilitud. Modifíquelo para obtener un estimador insesgado.

18. Sea X variable aleatoria con densidad $f_X(x) = Cx^{r-1}\mathbf{1}_{[0,b]}(x)$, donde $C > 0$, $b > 0$ y $r > 0$ son constantes. Se sabe que $\mathbb{E}(X) = r/(r+1)$.

    a) Muestre que $C = r$ y $b = 1$.

    b) Dado $t > 0$, calcule $\mathbb{E}(X^t)$. Obtenga la varianza de X.

    c) Muestre que $-\ln(X)$ tiene distribución exponencial de parámetro r.

    d) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple proveniente de la distribución de X. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de r es $\hat{r} = -n/\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$.

    e) Muestre que $\hat{r} \to r$ casi seguramente cuando $n \to \infty$.