Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403
Probabilidades y Estadística
Primavera 2013

Guía ejercicios 3

1. El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100 % de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50 % de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna un 25 %. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo $[\$25, \$175]$.

2. Calcule $\mathbb{E}(X)$ si X tiene densidad dada por

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} 5/x^2 & x > 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

3. *a)* Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.

   b) Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}(|X|)$.

4. *a)* Sea X variable aleatoria absolutamente continua que toma valores en $[0, \infty)$. Pruebe que

   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx.$$

   b) Sea X variable aleatoria absolutamente continua, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que

   $$\mathbb{E}(g(X)) = \int_0^\infty g(x)f_X(x)dx.$$

   Indicación: si llamamos

   $$I_x = \{y \in \mathbb{R} : g(y) > x\},$$

   se tiene que $\mathbb{P}(g(X) > x) = \int_{I_x} f_X(y)dy$.

5. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

6. La densidad de la variable aleatoria X es $f_X(x) = (ax + bx^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Se sabe además que el valor esperado de X es 0,6.

   a) Calcule a y b.

   b) Calcule F_X y $\mathbb{P}(X > 1/2)$.

   c) Calcule $\text{var}(X)$.

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, todas con distribución uniforme en $[0, 1]$. Sea $Y = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$. Pruebe que $f_Y(y) = ny^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$, y calcule $\mathbb{E}(Y)$.

8. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X - \alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \text{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

9. Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* si su densidad está dada por

   $$f(x) = \begin{cases} c(x_m/x)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

   donde $x_m, \alpha > 0$ son parámetros.

   a) ¿Cuál es el valor de c?

   b) ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X? Calcule $\mathbb{E}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

   c) ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X? Calcule $\text{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

   d) ¿Cuál es la distribución de $\log(X/x_m)$?

10. Se dispone de una urna con N bolitas numeradas de 1 a N. Se extraen bolitas con resposición de manera independiente hasta que haya salido cada bolita al menos una vez. Sea X la variable que denota la cantidad total de extracciones realizadas, y sea X_k la cantidad de extracciones desde la vez $k-1$ que aparece una bolita que no había salido antes (excluyendo esa extracción) hasta la siguiente vez que aparece una bolita que no ha salido antes (incluyendo esa extracción), para $k = 1, \ldots, N$. Deduzca la distribución de cada X_k, y obtenga una expresión para $\mathbb{E}(X)$.

11. Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$. Muestre que

    $$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

12. Una persona esta juntando un album con N (tipos de) láminas. Suponga que cada lámina se compra de a una (sin saber de cuál tipo es), y que los N tipos de láminas son equiprobables. Pruebe que el número esperada de tipos de láminas distintas que habrán cuando se compran n láminas es $N(1 - (\frac{N-1}{N})^n)$. Ind: defina X_i como la indicatriz del evento "hay una lámina del tipo i entre las n compradas". Calcule $\mathbb{E}(X_i)$ y deduzca la respuesta.

13. Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

14. Un grupo de n hombres y m mujeres se forman al azar en una fila. Determine el número esperado de hombres que tienen al menos una mujer al lado suyo. *Indicación:* defina una variable indicatriz adecuada por cada hombre.

15. Pruebe que la función generadora de momentos de una variable uniforme en $[a, b]$ es

$$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.$$

16. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t) = e^{2e^t - 2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

17. Pruebe que la función generadora de momentos de una variable binomial con parámetros n y p es

$$(1 - p + pe^t)^n.$$

Indicación: escriba la variable de interés como suma de n variables independientes sencillas.

18. Sea X variable aleatoria con distribución *chi-cuadrado con n grados de libertad*, anotado $X \sim \chi^2_n$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$

donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\theta-1} dz$ es la función Gamma.

   a) Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}$ para $t < 1/2$.
   b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\text{var}(X)$.
   c) Si Y es una variable normal estándar, muestre que $Y^2 \sim \chi^2_1$. Utilice el hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
   d) Concluya que si $X_1, \ldots, X_n$ son normales estándar independientes, entonces $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ tiene distribución χ^2_n. *Indicación:* utilice las propiedades de la f.g.m.

19. Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   a) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

   b) Pruebe que para todo $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X^s) = e^{\mu s + \sigma^2 s^2/2}$. Obtenga la esperanza y varianza de X. *Indicación:* utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   c) Pruebe que la f.g.m. $M_X(t)$ no está definida para $t > 0$.
   d) Sea $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Pruebe que $V = \alpha + \beta U$ tiene distribución $\mathcal{N}(\alpha + \beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. Utilice esto para obtener la distribución de aX^b, donde $a > 0$ y $b \neq 0$.
   e) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con distribución log-normal de parámetros μ_1, σ_1^2 y μ_2, σ_2^2, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de $Z = X_1 X_2$?

20. Sean $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ variables aleatorias independientes. Muestre que $Z = X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. *Indicación:* calcule la densidad de Z mediante una propiedad conocida (sabiendo que una integral del tipo $\int_{-\infty}^\infty e^{-A(y-B)^2} dy$, con A y B constantes, no depende del valor de B), o bien utilice la f.g.m. y sus propiedades (recordando que si W es normal entonces su f.g.m. es $e^{t\mathbb{E}(W) + \frac{1}{2}t^2 \text{var}(W)}$).

21. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-x^2}}{y^2 + 1}$$

para todo x e y.

   a) ¿Son independientes? Explique.
   b) Calcule las densidades marginales. ¿Qué variables conocidas son X e Y?

22. Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$, $V = XY$. Muestre que función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{e^{-(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

23. Sean $X \sim \text{unif}(0,1)$, $Y \sim \exp(1)$ variables independientes. Sean $U = X + Y$, $V = \frac{X}{Y}$. Muestre que

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{ue^{-u/(v+1)}}{(v+1)^2} & \text{si } 0 < u \leq 1 + 1/v \text{ y } 0 < v \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

24. Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Determine la función de densidad conjunta de $U = X$ y $V = X/Y$. Muestre que X/Y tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

25. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ como en la figura 1, y sea (X,Y) un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre A, es decir, $f_{X,Y}(x,y) = \text{área}(A)^{-1} \mathbf{1}_A(x,y)$.

   a) Muestre que $f_X(x) = \frac{2-|x|}{3} \mathbf{1}_{[-1,1](x)}$. Calcule también la densidad marginal de Y.
   b) Deduzca que $\mathbb{E}(X) = 0$ y muestre que $\text{cov}(X,Y) = 0$.
   c) ¿Son independientes X e Y? Justifique.

26. **Sobre el proceso de Poisson.**

Sean $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ v.a. independientes de ley $\mathbf{e}xp(\lambda)$ con $\lambda \in]0, \infty[$. Nos referiremos a estas variables como los tiempos "entre llegadas". Llamaremos "instantes de llegadas" a la sucesión de v.a. definidas para $\omega \in \Omega$ por

$$T_0(\omega) = 0, \quad T_1(\omega) = S_1(\omega), \quad T_n(\omega) = S_1(\omega) + \cdots + S_n(\omega).$$

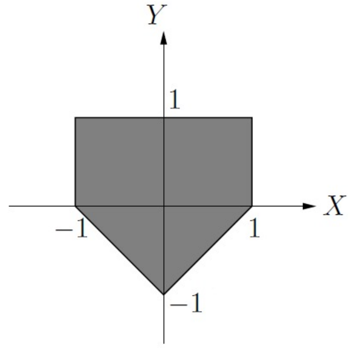

Figura 1: Conjunto A

El **proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ de parámetro λ** es la familia $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aleatorias (indexada por $\mathbb{R}_+$) definida por

$$N_t(\omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

Note que para cada $\omega \in \Omega$, la variable aleatoria $N_t(\omega)$ *cuenta* el número de llegadas ocurridas en el intervalo $]0, t]$. (Puede pensar que las v.a. T_n representan por ejemplo, los instantes en que llegan clientes a un banco).

a. Pruebe que para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t < \infty$ casi seguramente, es decir, $\mathbb{P}(N_t < \infty) = 1$.
Ind.: Muestre que $\mathbb{P}(T_n \leq t) \leq \mathbb{P}(S_1 \leq t, \ldots, S_n \leq t) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Relacione el evento $\{N_t = \infty\}$ con los eventos $\{T_n \leq t\}$ y deduzca que $\mathbb{P}(N_t = \infty) = 0$.

b. Pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}_+$ el número de llegadas ocurridas hasta el instante t tiene ley de Poisson de parámetro λt, es decir,

$$N_t \sim \mathcal{P}oiss(\lambda t).$$

Ind.: Muestre que $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_n + S_{n+1}\}$. Luego, explique porqué T_n y S_{n+1} son independientes (no se pide probarlo en detalle) e identifique la ley de T_n. Usando todo esto, calcule $\mathbb{P}(N_t = n)$. Le será útil el hecho que $\Gamma(n) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$, lo que se muestra por inducción.

c. Usando lo anterior, pruebe que para cada $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} - t > s | N_t = n) = \mathbb{P}(T_1 > s) = e^{-\lambda s}$$

Para cada tiempo $t > 0$, diga entonces cuál es la densidad condicional del tiempo restante hasta la siguiente llegada, dado el número de llegadas ya ocurridas.

27. En un banco, las 5 cajas disponible atienden a tasa de 0,4 personas por minuto cada una. Las personas se ubican en una única fila por orden de llegada y van siendo atendidas a medida que se desocupan las cajas.

a) ¿Cuál es la tasa de atención conjunta de las cajas?

b) ¿Cuál es el tiempo promedio de espera de la primera persona en la fila?

c) Usted llega al banco y se ubica en la fila, quedando en el sexto puesto. ¿Cuál es la probabilidad de que usted pase a una caja antes de 2 minutos? ¿Cuál es el valor esperado del tiempo que transcurre desde que usted se ubica en la fila hasta que termina de ser atendido?

28. Un cazador sabe que en el sector que él caza se avistan pájaros a tasa de λ pájaros por hora.

a) Calcule la probabilidad que el cazador aviste más de M pájaros en 1 hora.

b) Suponga ahora que el cazador caza a un pájaro avistado con probabilidad p. Calcule la probabilidad que cace exactamente k pájaros en t horas. *Indicación:* Condicione en el número de pájaros avistados.

c) Llamemos N_t a la cantidad de pájaros cazados hasta el tiempo t. En base a lo obtenido en el ítem anterior, ¿qué puede decir acerca de $(N_t)_{t\geq 0}$?