

GUÍA EJERCICIOS 2

Recuerde que la función de distribución discreta de una v.a. X es $p_X(y) = \mathbb{P}(X = y)$ y la función de distribución acumulada es $F_X(z) = \mathbb{P}(X \leq z)$.

- Se dispone de una urna con n bolitas rojas indistinguibles entre sí, y m bolitas azules indistinguibles entre sí. Se van extrayendo bolitas al azar sin reposición y se ubican en una fila ordenada, hasta que se extraen todas las bolitas.

- ¿Cuántas posibles filas resultantes hay?
- Sea X el número de la extracción en que se acumulan r bolitas rojas (con $r \leq n$). Calcule la función de distribución discreta de X .

- Sea X v.a. geométrica de parámetro $p \in (0, 1)$ y defina $Y := \frac{1}{X}$. Encuentre la función de distribución acumulada de Y .
 - Sea Z una v.a. a valores en $\mathbb{Z}$. Decimos que Z es simétrica si $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k)$ para todo entero k . Muestre que Z es simétrica si y sólo si $F_Z(k) = 1 - F_Z(k-1)$ para todo $k \geq -1$. Dé una caracterización de simetría en términos de una relación similar para $k \geq 1$ y calcule $\mathbb{P}(Z = 0)$ en términos de $F_Z(-1)$.

- Sea $\alpha > 0$, y defina para $x \geq 0$ la función

$$F(x) := c \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k^\alpha},$$

donde $c > 0$ es una constante.

- Muestre que si $\alpha \leq 1$, no existe ninguna constante c ni ninguna v.a. X tal que $F = F_X$.
 - En el caso que $\alpha > 1$, encuentre c t.q. F es una función de distribución acumulada, y explicita $\mathbb{P}(X = k)$ para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donde X es una v.a. t.q. $F_X = F$.
- Sea Z una variable geométrica. Muestre que $\mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y que esa igualdad caracteriza la distribución geométrica.

Se sabe que el evento en que un teléfono celular de la marca A se rompe cuando cae al suelo tiene probabilidad p , independiente de las otras caídas. Para un celular de la marca B se cumple lo mismo, pero con probabilidad q de romperse, donde $q > p$. Usted se compra un celular y escoge al azar la marca, y después de k caídas aún funciona.

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido la marca A ? ¿Qué pasa cuando k es grande? Comente. *Indicación:* trabaje con la variable aleatoria X del número de la caída en que el celular se rompe. ¿Qué distribución tiene X cuando la marca es A ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que su celular vuelva a sobrevivir otras k caídas?

- Suponga que su celular efectivamente es de la marca A . Suponga también que la cantidad de caídas que ocurren mensualmente es una variable Y con distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Calcule la probabilidad de que su celular sobreviva un mes más. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, condicione en los posibles resultados de Y . Puede suponer que las variables X e Y son independientes.

- Pruebe que una v.a. aleatoria X discreta tiene ley geométrica si y sólo si no tiene memoria, es decir, para todo natural $m, n \geq 1$ se cumple

$$\mathbb{P}(X > m+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m).$$

- Sean $X \sim \text{geom}(p)$ e $Y \sim \text{geom}(q)$ independientes. Muestre que $\min\{X, Y\} \sim \text{geom}(p+q-pq)$. Interprete.
- Sean $X \sim \text{bin}(n, p)$ e $Y \sim \text{bin}(m, p)$ independientes. Muestre que $X+Y \sim \text{bin}(n+m, p)$. Interprete. *Indicación:* para calcular $\mathbb{P}(X+Y = k)$, particione en los posibles resultados de X y utilice la identidad

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{n+m}{k},$$

con la convención $\binom{a}{b} = 0$ cuando $b > a$.

- Juan y Pedro lanzan una moneda (no necesariamente equilibrada) sucesivas veces, haciendo la siguiente apuesta: Juan gana si salen n caras antes de que hayan salido m sellos. En caso contrario, gana Pedro. Suponga que en cada lanzamiento, la probabilidad de que salga cara es p .

- Muestre que para que ocurran n caras antes de m sellos, es necesario y suficiente que ocurran al menos n caras en los primeros $m+n-1$ lanzamientos.
- Pruebe que la probabilidad de que en una serie de N lanzamientos, k determinados de ellos resulten cara (es decir, por ejemplo, para $N = 10$, el primero, el cuarto y el décimo son $k = 3$ lanzamientos determinados) es igual a $p^k(1-p)^{N-k}$.
- Deduzca que la probabilidad de que Juan gane es

$$\sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}.$$

- Se quiere estimar la población total N de cierta especie animal en un ecosistema. Para esto, se captura primero un número r de ellos, y se marcan. Después de un año, se captura una cantidad n . Sea X el número de animales que en la segunda captura están marcados. Calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Se estimará a continuación el número N de la manera siguiente: suponga que se capturaron $X = k$ animales marcados. Entonces, un estimador de N será el número $\hat{N}$ que hace más probable ese valor dado de X . (Esto es lo que en estadística se llama un “estimador de máximo de verosimilitud”). Encuentre $\hat{N}$. Compare el resultado con la idea intuitiva de que la proporción de animales marcados entre aquellos capturados debería ser la misma que en la población total. Estime N si $r = 50$, $n = 40$, y se obtuvo $k = 4$.

9. a) Suponga que el número X de clientes que llegan a hacer un trámite al banco en cierto rango horario es una v.a. de Poisson de parámetro λ . Suponga que con probabilidad p cada cliente que llega es hombre. Pruebe que el número Y de clientes hombres que llegan en ese rango horario es una variable de Poisson de parámetro λp . *Indicación:* calcule primero $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n)$ para $k \leq n$.
- b) Sean X e Y dos v.a. de Poisson independientes, de parámetros λ y γ respectivamente. Pruebe que $X + Y$ es una v.a. de Poisson de parámetro $\lambda + \gamma$. *Indicación:* note que

$$\{X + Y = n\} = \bigcup_{k=0}^n \{X = k\} \cap \{Y = n - k\},$$

con $\{X = k\}$ y $\{Y = n - k\}$ eventos independientes.

10. Durante 50 semanas Ud. compra un ticket para una rifa semanal, en la cual tiene probabilidad 0,01 de ganar un premio. Calcule utilizando una aproximación la probabilidad de ganar:
- a) al menos una vez,
- b) exactamente una vez,
- c) al menos tres veces.