Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403
Probabilidades y Estadística
Primavera 2013

Guía ejercicios 1

En esta guía se usa indistintamente la notación $A \cap B = AB$ para la intersección de eventos A y B.

1. Sean E, F y G eventos.
   a) Pruebe que $\mathbb{P}(EF^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF)$.
   b) Pruebe que $\mathbb{P}(E^cF^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.
   c) Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(EF)$.
   d) Pruebe que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) \\ &\quad -\mathbb{P}(E^cFG) - \mathbb{P}(EF^cG) \\ &\quad -\mathbb{P}(EFG^c) - 2\mathbb{P}(EFG).\end{aligned}$$

2. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuados para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de $1/2$ ó más?

3. Juan, Pedro y Emilio lanzan por turnos una moneda, y gana el primero que obtiene cara. (Suponga que ese es el orden en que lanzan). Explique porque puede tomarse como espacio muestral $\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}$ y describa los eventos “gana Juan”, “ gana Pedro” y “gana Juan o Pedro”.

4. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Este se dice *no atómico* si $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.
   a) Si $(\Omega, \mathbb{P})$ es no atómico y $x \in \Omega$, muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
   b) Muestre que si Ω es numerable, $(\Omega, \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.
   c) Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ no atómico. Muestre que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \varepsilon$. *Indicación:* muestre el resultado para ε de la forma $\mathbb{P}(B)/2^n$.

5. Un mazo inglés (52 cartas) se revuelve y se van mostrando las cartas una por una. Dé un espacio muestral adecuado para describir este experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que la décimocuarta carta sea un as? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la décimocuarta carta?

6. En un examen que consta de 10 preguntas, un estudiante debe responder exactamente 7.
   a) ¿De cuántas formas puede el estudiante escoger las preguntas?
   b) Si además se le exige que conteste al menos 3 de las primeras 5 preguntas, ¿de cuántas formas puede escoger las preguntas?

7. En un curso de 40 alumnos deben formarse tres equipos de baby fútbol (5 jugadores) y uno de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si
   a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?
   b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

8. Considere n personas que se deben ordenar, dentro de las cuales hay un matrimonio. Si las personas se ordenan en una línea, ¿cuál es la probabilidad de que el matrimonio quede junto? ¿Cuál es esta probabilidad si las personas se ordenan en círculo?

9. De un equipo de 5 ingenieros y 7 técnicos debe constituirse una comisión de 2 ingenieros y 3 técnicos. ¿De cuántas formas puede hacerse si:
   a) todos son igualmente elegibles?
   b) hay un técnico en particular que debe estar en la comisión?
   c) hay un ingeniero y un técnico que no pueden escogerse simultáneamente?
   d) 2 de los 5 ingenieros también cuentan como técnicos? (distinguiendo el cargo asignado).

10. Una persona tiene que escoger 5 de sus 8 amigos para irse de viaje. ¿De cuántas formas puede escoger los amigos si
   a) dos de ellos están peleados entre sí y no irán juntos?
   b) dos de ellos solo van si los invitan a ambos?

11. Probar (sin desarrollar las fórmulas) que
$$\binom{n+1}{4} = \frac{1}{3}\binom{\binom{n}{2}}{2}$$
   Indicación: considere un grupo de $n+1$ objetos de los cuales uno es especial y cuente de dos maneras el número de subconjuntos de tamaño 4.

12. Considere un grupo de n personas. Calculando de dos maneras el número de posibles selecciones de un comité y un jefe del comité, muestre que
$$\sum_{i=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

13. Cuántas derivadas de orden r tiene una función $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables?

14. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define F_n como el conjunto de todas las funciones de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, n\}$. Dado $0 \le k \le n$, se define
$$A_k = \{f \in F_n : |\{i : f(i) = i\}| = k\},$$
   es decir, A_k es el conjunto de funciones en F_n con exactamente k puntos fijos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.
   a) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.
   b) Se escoje una función al azar en F_n. Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k.
   c) Calcular p_n, la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.

d) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} p_n = (e-1)/e$.

15. 45 personas indistinguibles suben a un bus vacío que tiene 60 asientos distinguibles ubicados de a pares, y cada persona se ubica en un asiento. ¿De cuántas formas pueden quedar ocupados los asientos si:

    a) no hay restricciones en la forma de sentarse?

    b) se utiliza al menos un asiento de cada par?

    c) se utiliza al menos un asiento de cada par, y hay 2 personas que pueden escoger sentarse o quedar de pie?

16. En una competencia de ciclismo por países compiten 3 brasileros, 4 argentinos, 2 uruguayos y 1 chileno. Si el puntaje sólo toma en cuenta los países que los competidores representan, y no sus nombres, de cuántas maneras puede resultar la competencia? De cuántas formar puede ocurrir que de los 3 brasileros haya uno en los tres primeros puestos y 2 en los últimos 3?

17. Dos cajas contienen fósforos buenos y fósforos malos. Suponga que la primera caja contiene n_1 fósforos buenos y n_2 fósforos malos, y la segunda caja contiene m_1 fósforos buenos y m_2 fósforos malos. Se elige una caja al azar, y de esa caja se elige un fósforo al azar. Calcule la probabilidad de que el fósforo elegido sea bueno.

18. Las monedas A y B tienen probabilidades de cara p y q, respectivamente, donde $p < q$. Se escoge una de las monedas al azar y se lanza n veces, y se observa que todos los lanzamientos salieron cara.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido la moneda A? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?

    b) Se vuelve a lanzar la moneda una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva a aparecer una cara? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$?

19. Un juego de dados tiene las siguientes reglas: Se lanzan 2 dados. Si las suma es $2, 3$ ó 12 el jugador pierde. Si es 7 u 11, gana. Si es otro número, el jugador continua a lanzar los dos dados hasta que el resultado sea o bien el resultado que obtuvo inicialmente, o bien un 7. Si es un 7, pierde. Si es el resultado inicial, gana. Calcule la probabilidad de que el jugador gane.
    Indicación: sea E_i el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana". Explique porque la probabilidad buscada es igual a $\sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(E_i)$ y calcule $\mathbb{P}(E_i)$. Para esto, note que $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{i,n})$, donde $E_{i,n}$ es el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana en la $n-$ésima tirada.

20. Se tienen 3 cartas en una caja, una de color negra por ambas caras, una de color rojo por ambas caras, y una de una cara negra y una roja. Se saca una carta, de la cuál sólo se ve un lado, que es rojo. Si tuviera que apostar por el color de la otra cara, ¿hay alguna diferencia en apostar por rojo o negro? ¿Qué apostaría Ud.? *Indicación:* como siempre, tenga cuidado con cuáles son "resultados equiprobables".

21. Un avión se ha perdido, y se presume que está en una de 3 posibles zonas, de manera equiprobable. Denotemos α_i, para $i = 1, 2, 3$, la probabilidad de que una búsqueda encuentre el avión en la zona i cuando efectivamente está en esa zona. Se realizará una búsqueda en las tres regiones.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el avión?

    b) Dado que la búsqueda en la zona 1 no encontró al avión, calcule la probabilidad de que esté en la zona i, para $i = 1, 2, 3$.

22. Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo. Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.

    a) Si la ecografía predice que será mujer, ¿cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?

    b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

23. Sea Ω un espacio muestral y B un evento con $\mathbb{P}(B) > 0$. Se sabe que la aplicación que a $A \subset \Omega$ asocia $\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$ es una medida probabilidad (pruébelo si no lo sabía). En base a esto, decimos que dos eventos A_1 y A_2 son independientes condicionalmente a B si son independientes para la medida de probabilidad $\mathbb{P}_B$, es decir, si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B)\mathbb{P}(A_2|B)$.
    Construya ejemplos simples de que "A_1 independiente de A_2" no es condicón necesaria ni suficiente para que A_1 y A_2 sean independientes condicionalmente a B.

24. Se sabe que el 20 % de la población chilena sufre de depresión. El plan SUPERULTRAGOLD de la Isapre Winnermédica otorga licencia por depresión teniendo un 90 % de certeza de que el paciente sufre la enfermedad. Un paciente llega a la Isapre con los diagnósticos de dos Doctores A y B que indican que tiene depresión. La Isapre estima que que cuando se sufre de depresión, el Dr. A diagnostíca la enfermedad en el 99 % de los casos, y el Dr. B en el 98 %. Pero además, cuando no se está enfermo de depresión, el Dr. A "diagnostica" esta enfermedad en el 60 % de los casos y el Dr. B en el 30 % (es decir, dan licencias falsas).
    Con esta información, ¿debe la Isapre otorgarle licencia a este paciente? *Indicación:* suponga que condicionalemente al estado de salud del paciente, los diagnósticos de los dos doctores son independientes.

25. Sean $E_1, \ldots, E_n$ eventos independientes. Pruebe que
    $$\mathbb{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(E_i)).$$

26. Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S.

    a) Pruebe que $\mathbb{P}(A \subseteq B) = (3/4)^n$. Indicación: condicione en la cantidad de elementos de B.

    b) Pruebe que $\mathbb{P}(AB = \phi) = (3/4)^n$.

27. Pruebe la fórmula del multinomio
    $$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum \left(\begin{array}{c} n \\ n_1, n_1, \ldots n_r \end{array} \right) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$
    donde la suma es sobre todas las $r-$tuplas $(n_1, \ldots, n_r)$ de enteros no negativos tales que $n_1 + \cdots + n_r = n$.