Auxiliar 11: Pre-Examen

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar: José Cereceda - Antonio Lizama
7 de diciembre de 2013

Problemas.

P1. Para modelar la cantidad X de productos defectuosos que se encuentran en una línea de producción en determinado período de tiempo, se utiliza un modelo de dos parámetros llamado *Poisson con Ceros Forzados* (PCF). Decimos que la variable X tiene distribución de Poisson con ceros forzados, denotado por $X \sim \text{PCF}(\lambda, p)$, si $X = YZ$ con Y, Z independientes y tales que $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $Z \sim B(1,p)$ (bernoulli de parámetro p). El modelo representa que si la producción tiene una muy baja tasa de errores, entonces la probabilidad de que no haya defectuosos es más alta que en un modelo de Poisson tradicional.

a) Calcule $\mathbb{P}(X = k)$ para todo k entero no negativo.

Solución:

Consideremos primero $k = 0$. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(YZ=0) \\
&= \mathbb{P}(Y=0 \text{ o } Z=0) \\
&= \mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Z=0)-\mathbb{P}(Y=0,Z=0) \\
&= \mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Z=0)-\mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}(Z=0) \\
&= e^{-\lambda}+1-p-e^{-\lambda}(1-p) \\
&= 1-p+pe^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Ahora tomemos $k \geq 1$. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(YZ=k) \\
&= \mathbb{P}(Y=k, Z=1) \\
&= \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(Z=1) \\
&= pe^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$
.

b) Decimos que $X = 0$ es un *cero forzado* cuando ocurre $Z = 0$. Dado que se observa $X = 0$, hallar la probabilidad de que sea un cero forzado.

Solución:

Debemos calcular $\mathbb{P}(Z = 0|X = 0)$. Usemos Bayes (también se puede hacer usando la definición de probabilidad condicional):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=0|X=0) &= \mathbb{P}(X=0|Z=0)\frac{\mathbb{P}(Z=0)}{\mathbb{P}(X=0)} \\
&= 1\cdot\frac{1-p}{1-p+pe^{-\lambda}} \\
&= \frac{1-p}{1-p+pe^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ y $\text{Var}(X)$.

Solución:

Notemos que Y, Z son independientes, luego $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = \lambda p$. Para calcular $\mathbb{E}(X^2)$, notemos que Y^2 y Z^2 también son independientes. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(Y^2Z^2) \\
&= \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2) \\
&= \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z) \\
&= (\text{Var}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2)\mathbb{E}(Z) \\
&= (\lambda + \lambda^2)p.
\end{aligned}$$

Finalmente, en base a lo ya calculado tenemos que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (\lambda + \lambda^2)p - \lambda^2p^2 = \lambda p(1 + \lambda - \lambda p)$.

d) Dada una m.a.s $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_i \sim \text{PCF}(\lambda, p)$, encuentre los estimadores $\hat{\lambda}$ y $\hat{p}$ de los parámetros por el método de los momentos.

Solución:

Imponemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}\hat{p} &= \overline{X} \\
\hat{\lambda}\hat{p}(1 + \hat{\lambda} - \hat{\lambda}\hat{p}) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.
\end{aligned}$$

Por comodidad en los cálculos, hagamos $\alpha = \overline{X}$ y $\beta = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. Despejando $\hat{p}$ de la primera, tenemos que $\hat{p} = \alpha/\hat{\lambda}$ y reemplazamos esto en la segunda ecuación, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\beta &= \hat{\lambda}\frac{\alpha}{\hat{\lambda}}(1 + \hat{\lambda} - \hat{\lambda}\frac{\alpha}{\hat{\lambda}}) \\
&= \alpha(1 + \hat{\lambda} - \alpha),
\end{aligned}$$

es decir, $\hat{\lambda} = \frac{\beta}{\alpha} + \alpha - 1$, y por lo tanto $\hat{p} = \frac{\alpha^2}{\beta + \alpha^2 - \alpha}$.

P2. *a*) El borrachito Tonho parte desde su casa, ubicada en el origen de la recta real y en cada minuto avanza 2 con probabilidad 1/6, 1 con probabilidad 1/6, -1 con probabilidad 1/3, y se queda en el lugar con probabilidad 1/3.

i) Calcule la probabilidad de que a los 36 minutos Tonho se encuentre a más de 10 unidades del origen.

<u>**Solución:**</u>

Sea Y_i el i-ésimo movimiento que da Tonhito. Luego, $(Y_i)_{i\geq 0}$ es una sucesión de va's iid. Calculemos su esperanza y varianza:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_i) &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6} \\
\text{Var}(Y_i) &= \mathbb{E}(Y_i^2) - \mathbb{E}(Y_i)^2 \\
&= 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\
&= \frac{7}{6} - \frac{1}{36} \\
&= \frac{41}{36}
\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad de que la partícula esté a más de 10 unidades del origen, corresponde a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{36} Y_i\right| > 10\right) &= 1-\mathbb{P}\left(-10 \le \sum_{i=1}^{36} Y_i \le 10\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\frac{-10-6}{\sqrt{41}} \le \frac{\sum_{i=1}^{36} Y_i - 6}{\sqrt{41}} \le \frac{10-6}{\sqrt{41}}\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\frac{-16}{\sqrt{41}} \le \frac{\sum_{i=1}^{36} Y_i - 6}{\sqrt{41}} \le \frac{4}{\sqrt{41}}\right) \\
&= 1-\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)+\Phi\left(-\frac{16}{\sqrt{41}}\right)
\end{aligned}$$

ii) Si X_n es la posición de Tonho a los n segundos, ¿qué distribución tiene X_n para n grande? Suponga que hay un bar que se encuentra bastante lejos a la derecha de la casa, y Tonho desea llegar al bar. En base a la forma de avanzar de Tonho, ¿llegará en algún momento al bar? Argumente su respuesta.

<u>**Solución:**</u>

Siguiendo con la notación de la parte anterior, tenmos que $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Sea $\mu = \frac{1}{6}$ y $\sigma = \frac{\sqrt{41}}{6}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \le x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \le x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \sim \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

Es decir, para n grande, $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{6}, \frac{41n}{36}\right)$. Notemos que para n grande el valor esperado de la posición en el movimiento n-ésimo es $\mathbb{E}(X_n) = n/6$, lo cual crece cuando $n \to \infty$ y además $\sigma(X_n) = o(\mathbb{E}(X_n))$ por lo que podemos afirmar que Tonho llega al bar para satisfacer su vicio.

<u>**Solución:**</u>

Otra forma de analizar el problema es analizar la siguiente probabilidad

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \ge x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \ge x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \ge \frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&\approx 1-\Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

si hacemos tender $n \to \infty$, se tiene que $\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to -\infty$, de manera queda $\Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \to 0$, luego

$$\mathbb{P}(X_n \ge x) \to 1$$

por lo que eventualmente tonhito pasara por x donde se encuentra el bar para satisfacer su vicio.

iii) Determine cuántos minutos deben pasar para que con probabilidad de 0.999 Tonho se encuentre en el lado positivo de la recta.

Solución:

Estar al lado positivo de la recta significa ser mayor a 0. Luego, imponemos:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_n > 0) = 0{,}999 \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}(X_n \leq 0) = 0{,}001 \\
\Rightarrow\ & \Phi\left(-\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}001 \\
\Rightarrow\ & 1 - \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}001 \\
\Rightarrow\ & \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}999 \\
\Rightarrow\ & n = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\Phi^{-1}(0{,}999) = 41\Phi^{-1}(0{,}999).
\end{aligned}$$

P3. Dadas $X \sim U[0,1]$ e $Y \sim U[0,2]$ independientes, calcule $\mathbb{P}(X > Y | X > 1 - Y)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > Y | X > 1 - Y) &= \frac{\mathbb{P}(X > Y, X > 1 - Y)}{\mathbb{P}(X > 1 - Y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > Y > 1 - X)}{\mathbb{P}(X > 1 - Y)} \\
&= \frac{1/8}{6/8} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

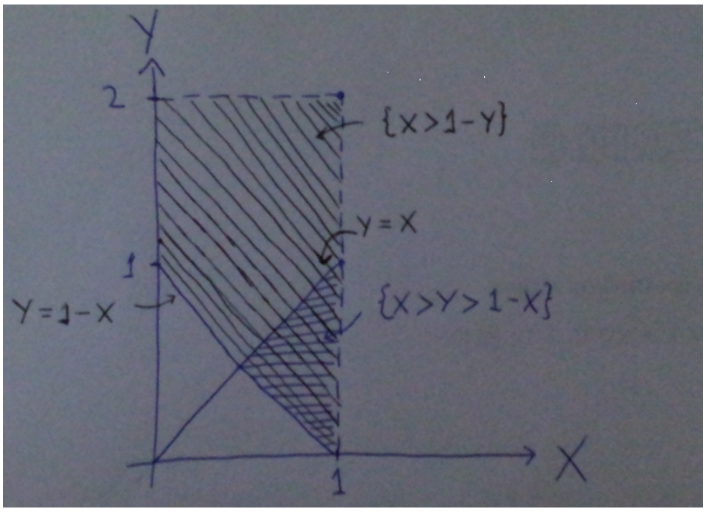

Figura 1: Gráfico de las regiones consideradas.

P4. Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim U(-\pi, \pi)$. Sean $U = \sqrt{X}\cos Y$ y $V = \sqrt{X}\sin Y$. Usando el Teorema de Cambio de Variables encuentre la densidad conjunta de U y V. Concluya que U y V son independientes y que distribuyen como $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\lambda}\right)$.

Solución:

Primemo notemos que $X^2 = U^2 + Y^2$. Además, $arctg(\frac{U}{V}) = Y$. Luego,

$$\begin{aligned}
|J(U,V)| &= \begin{vmatrix} 2U & 2V \\ \frac{-V/U^2}{1+V^2/U^2} & \frac{1/V}{1+V^2/U^2} \end{vmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \lambda e^{-\lambda(u^2+v^2)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \\ &= \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(u^2+v^2)} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda u^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda v^2}}_{\sim N(0,\frac{1}{2\lambda})} \end{aligned}$$

Luego, U y V son independientes y distribuyen $N(0, \frac{1}{2\lambda})$.

P5. *a*) Sea Y v.a. tq $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=2) = 1/2$. Se obtiene un valor de Y y posteriormente se lanza una moneda perfecta tantas veces como el valor obtenido. Si X es el número de sellos obtenidos.

i.- Calcule $\mathbb{P}(X=k)\ \forall k \in R_X$

Solución: Primero notemos que $\text{sop}(Y) = \{1,2\}$. Luego, $\text{sop}(X) = \{0,1,2\}$. Calculemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(X=0|Y=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=0|Y=2)\mathbb{P}(Y=2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X=0|Y=1) + \mathbb{P}(X=0|Y=2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{8} \\ \mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(X=2|Y=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=2|Y=2)\mathbb{P}(Y=2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X=2|Y=1) + \mathbb{P}(X=2|Y=2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{1}{2}$.

ii.- Calcule $\mathbb{P}(Y=1|X=1)$, $\mathbb{P}(Y=2|X=1)$ y $\mathbb{E}(Y|X=1)$.

Solución Usando Bayes:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=1|X=1) &= \mathbb{P}(X=1|Y=1) \cdot \frac{\mathbb{P}(Y=1)}{\mathbb{P}(X=1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(Y=2|X=1) &= \mathbb{P}(X=1|Y=2) \cdot \frac{\mathbb{P}(Y=2)}{X=1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(Y|X=1) &= 1 \cdot \mathbb{P}(Y=1|X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y=2|X=1) \\ &= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) Considere el experimento que consiste en lanzar n veces una moneda perfecta. Se denomida "run" a una secuencia "maximal" de caras consecutivas. Por ejemplo la secuencia *csssccccscsccscs* tiene 5 run. Muestre que el número esperado de run es $\frac{n+1}{4}$.

Indicación: Defina X_i la v.a. que indica si en la i-ésima posición comienza un run.

Solución: Como dice la indicación, sea X_i la v.a. que indica si en la i-ésima posición comienza un run. Luego, el total de runs corresponde a $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Queremos calcular $\mathbb{E}(X)$. DEfinamos también las variables aleatorias Y_i que corresponden a v.a.'s con distribución Bernoulli(1/2) y que valen 1 si el lanzamiento fue cara y 0 si fue sello. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \mathbb{E}(X_1) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \mathbb{E}(X_1) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i|Y_{i-1}))
\end{aligned}$$

Ahora, para encontrar esta probabilidad condicional notemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i|Y_{i-1} = 0) &= 1/2 \\
\mathbb{E}(X_i|Y_{i-1} = 1) &= 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\mathbb{E}(X_i|Y_{i-1}) = 1/2 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1/4$. Además, $X_1 = Y_1$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X_1) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i|Y_{i-1})) \\
&= \mathbb{E}(Y_1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{4} \\
&= \frac{n+1}{4}
\end{aligned}$$

Bonus: Sea $X \sim Bin(N_X, p)$ e $Y \sim Bin(N_Y, p)$, independientes.
Calcule $\mathbb{P}(X = k|X + Y = n)$. Interprete el resultado.
Solución:
Primero recordemos que si $X \sim Bin(n, p)$ e $Y \sim Bin(m, p)$ independientes, entonces $X + Y \sim Bin(n + m, p)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k|X + Y = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\binom{N_X}{k}\binom{N_Y}{n-k}}{\binom{N_X+N_Y}{n}}
\end{aligned}$$

Interpretación: Supongamos en una urna tenemos $N_X + N_Y$ bolitas, donde N_X son de color negro, y N_Y de color blanco. Luego lo que se está calculando es: dado que se extrajeron n bolitas, cuál es la probabilidad de que k sean negras.