AUXILIAR 11: PRE-EXAMEN

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIAR: JOSÉ CERECEDA - ANTONIO LIZAMA

5 DE DICIEMBRE DE 2013

- P1.** Para modelar la cantidad X de productos defectuosos que se encuentran en una línea de producción en determinado período de tiempo, se utiliza un modelo de dos parámetros llamado *Poisson con Ceros Forzados* (PCF). Decimos que la variable X tiene distribución de Poisson con ceros forzados, denotado por $X \sim \text{PCF}(\lambda, p)$, si $X = YZ$ con Y, Z independientes y tales que $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $Z \sim B(1, p)$ (bernoulli de parámetro p). El modelo representa que si la producción tiene una muy baja tasa de errores, entonces la probabilidad de que no haya defectuosos es más alta que en un modelo de Poisson tradicional.
- Calcule $\mathbb{P}(X = k)$ para todo k entero no negativo.
 - Decimos que $X = 0$ es un *cero forzado* cuando ocurre $Z = 0$. Dado que se observa $X = 0$, hallar la probabilidad de que sea un cero forzado.
 - Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ y $\text{Var}(X)$.
 - Dada una m.a.s $X_1, \dots, X_n$ tal que $X_i \sim \text{PCF}(\lambda, p)$, encuentre los estimadores $\hat{\lambda}$ y $\hat{p}$ de los parámetros por el método de los momentos.
- P2.**
- El borrachito Tonho parte desde su casa, ubicada en el origen de la recta real y en cada minuto avanza 2 con probabilidad $1/6$, 1 con probabilidad $1/6$, -1 con probabilidad $1/3$, y se queda en el lugar con probabilidad $1/3$.
 - Calcule la probabilidad de que a los 36 minutos Tonho se encuentre a más de 10 unidades del origen.
 - Si X_n es la posición de Tonho a los n segundos, ¿qué distribución tiene X_n para n grande? Suponga que hay un bar que se encuentra bastante lejos a la derecha de la casa, y Tonho desea llegar al bar. En base a la forma de avanzar de Tonho, ¿llegará en algún momento al bar? Argumente su respuesta.
 - Determine cuántos minutos deben pasar para que con probabilidad de 0.999 Tonho se encuentre en el lado positivo de la recta.
- P3.** Dadas $X \sim U[0, 1]$ e $Y \sim U[0, 2]$ independientes, calcule $\mathbb{P}(X > Y | X > 1 - Y)$.
- P4.** Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim U(-\pi, \pi)$. Sean $U = \sqrt{X} \cos Y$ y $V = \sqrt{X} \sin Y$. Usando el Teorema de Cambio de Variables encuentre la densidad conjunta de U y V . Concluya que U y V son independientes y que distribuyen como $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$.
- P5.**
- Sea Y v.a. tq $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = 1/2$. Se obtiene un valor de Y y posteriormente se lanza una moneda perfecta tantas veces como el valor obtenido. Si X es el número de sellos obtenidos.
 - Calcule $\mathbb{P}(X = k) \forall k \in R_X$
 - Calcule $\mathbb{P}(Y = 1 | X = 1)$, $\mathbb{P}(Y = 2 | X = 1)$ y $\mathbb{E}(Y | X = 1)$.

- b) Considere el experimento que consiste en lanzar n veces una moneda perfecta. Se denomina “run” a una secuencia “maximal” de caras consecutivas. Por ejemplo la secuencia $cssccccscscscs$ tiene 5 run. Muestre que el número esperado de run es $\frac{n+1}{4}$.
- Indicación:* Defina X_i la v.a. que indica si en la i -ésima posición comienza un run.